



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO
DE HIDALGO**

**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERÍA**

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

***“ARTICULACIÓN DE SABERES MATEMÁTICOS
Y MODELOS CONCEPTUALES”***

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN
EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA

L.C. ISAÍAS PÉREZ PÉREZ

DIRECTOR

DR. FERNANDO BARRERA MORA

PACHUCA DE SOTO, HGO. MARZO DE 2007



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS**

Pachuca, Hidalgo, 26 de marzo de 2007

**M. EN A. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR
P R E S E N T E .**

Por este conducto le comunico que el jurado asignado al pasante de la Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas, **Lic. en Comp. Isaías Pérez Pérez**, quien presenta el trabajo de tesis “**Articulación de Saberes Matemáticos y Modelos Conceptuales**”, ha decidido autorizar la impresión del mismo, después de revisarlo en reunión de sinodales.

A continuación aparecen las firmas de conformidad de los integrantes del jurado.

PRESIDENTE: Dr. Orlando Ávila Pozos

SECRETARIO: Dr. Ismael Antonio Muñoz Maya

VOCAL: Dr. Fernando Barrera Mora

PRIMER SUPLENTE:
M. en C. Juan Alberto Acosta Hernández

Agradeciendo de antemano su consideración al presente, le reitero la seguridad de mi distinguida consideración.

Atentamente,
“Amor, Orden y Progreso”

Fernando Barrera Mora
Coordinador de los Postgrados del CIMA.



Con copia para:
expediente
Archivo

Ciudad Universitaria Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5 C.P. 42184
Col. Carboneras Mineral de la Reforma Hidalgo.

Fernando Barrera Mora
Coordinador de Postgrados del CIMA
✉: barrera@uaeh.reduaeh.mx
☎: (771)7172000 Ext. 6164

AGRADECIMIENTOS

A la UAEH:

"Quien me educó para alcanzar mi desarrollo profesional y académico, indispensable para el logro de éste proyecto. Gracias por hacer de mi lo que hoy soy."

Al Dr. Fernando Barrera Mora:

"Por todo su apoyo, consideración, paciencia, profesionalismo y aún su amistad, para el desarrollo y buen termino de este proyecto. Muchas gracias por todo lo que me enseñó Doctor, y éste, también es su logro."

A la Dra. Ana Tarasenko:

"Por su incondicional apoyo que me brindó durante toda mi formación en el posgrado. Doctora, sin personas como usted, nunca lo hubiera logrado. Le estaré por siempre agradecido"

A mis alumnos de la Licenciatura en Sistemas Computacionales:

"Quienes me han brindado el medio propicio, y que por medio de los discursos dialécticos que entablo con ellos, han conformado en mi un pensamiento analítico y más crítico. Gracias a todos ellos, por hacerme un mejor ser humano."

A mis asesorados de tesis (Rodrigo, Magaly, Yadira, Isabel, Neftali, Julio, Claudia, Javier, Horacio y Víctor):

"Que me aportaron las 'semillas conceptuales', que dieron como fruto la conformación de muchas de las ideas plasmadas en el presente proyecto. Sin ellos, seguramente no hubiese podido llegar a concretarlas. Sin saberlo y sin quererlo, me aportaron las múltiples piezas del rompecabezas que finalmente hoy logré ensamblar. Gracias a todos ellos donde quiera que estén."

DEDICATORIAS

A Dios:

"El primero y el más grande de los sujetos que articula."

A mi esposa Oli:

"Por todo su apoyo, paciencia, cariño y ánimo que me brindó durante estos 1,680 días que duró este proyecto. Te amo mucho, mi Princesa."

A mi mamá Tomasa:

"Que siempre supo que alcanzaría las metas que me había fijado. A donde quiera que estés, mamá, este no es mi triunfo, sino el tuyo."

"A todos aquellos que han buscado, buscan y buscarán articular ideas matemáticas..."

*"Yo, hombre,
soy integración,
pluralidad aprisionada que cohabita en mi ... "*

Teodoro Césarman

CONTENIDO

Resumen

Capítulo I Definición del problema de investigación

- 1.1 Antecedentes
- 1.2 Definición del problema de investigación
- 1.3 Preguntas de investigación
- 1.4 Hipótesis
- 1.5 Estructura del trabajo

Capítulo II Marco Teórico

- 2.1 Concepciones sobre Articulación
- 2.2 Antecedentes históricos sobre la idea de la articulación
 - 2.2.1 El Atomismo
 - 2.2.1.1 El pensamiento atomista y los principios de la articulación
 - 2.2.2 El Mecanicismo Cartesiano
 - 2.2.2.1 El mecanicismo cartesiano y los principios de la articulación
 - 2.2.3 La Monadología de Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibnitz
 - 2.2.3.1 La Monadología y los principios de la articulación
- 2.3 El punto de vista de la Educación Matemática sobre la articulación
 - 2.3.1 Definición del Fenómeno de Articulación de Saberes Matemáticos
- 2.4 Definición del Conocimiento Matemático Articulado
- 2.5 El plan de estudios de matemáticas como un sistema conceptual
 - 2.5.1 Definición del currículo
 - 2.5.2 Tipos de currículums
 - 2.5.3 La organización y estructuración del plan de estudios
 - 2.5.4 La desarticulación del currículo escolar
 - 2.5.5 El proceso de desarticular el currículo
 - 2.5.6 La estructura del currículo escolar matemático
- 2.6 Definición del sistema conceptual
- 2.7 El sujeto que articula y su adquisición del Conocimiento Matemático Articulado
- 2.8 El papel del tiempo dentro del fenómeno de la articulación
- 2.9 El proceso de articular
 - 2.9.1 Definición del proceso de articular
 - 2.9.2 La definición de la jerarquía de los niveles del proceso de articular
 - 2.9.2.1 El Nivel 0: los preconceptos
 - 2.9.2.2 El Nivel 1: el conglomerado conceptual
 - 2.9.2.3 El Nivel 2: la estructura conceptual
 - 2.9.2.4 El Nivel 3: el sistema conceptual

Capítulo III Estado del arte

- 3.1 Las investigaciones cognitivas sobre Articulación de Saberes Matemáticos
 - 3.1.1 Las investigaciones de Greeno sobre operaciones aritméticas
 - 3.1.2 La experiencia de trabajo con mapas conceptuales en Matemáticas,

- de Francisco José Anillo Ramos
- 3.1.3 La investigación de Raymond Duval sobre demostraciones geométricas formales
- 3.2 Las investigaciones con enfoque sistémico y pedagógico, sobre Articulación de Saberes Matemáticos
 - 3.2.1 La organización lógica de las experiencias de aprendizaje de la ANUIES
 - 3.2.1.1 Construcción de secuencias pedagógicas: Técnica de Morgannov-Heredia

Capítulo IV Diseño del test de estimación de articulación

- 4.1 Saberes matemáticos presentes en el test de estimación de articulación
- 4.2 Las ecuaciones lineales
 - 4.2.1 Definición de ecuación lineal
 - 4.2.2 Representación esquemática de conceptos relacionados con la ecuación lineal
- 4.3 Los sistemas de ecuaciones lineales
 - 4.3.1 Definición de un sistema de ecuaciones lineales
 - 4.3.2 Representación esquemática de conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales
- 4.4 El test de estimación de articulación

Capítulo V Análisis de los resultados

- 5.1 Análisis de la sección 1.1
- 5.2 Análisis de la sección 1.2
- 5.3 Análisis de la sección 2.1
- 5.4 Análisis de la sección 2.2
- 5.5 Análisis de la pregunta final del test

Capítulo VI Conclusiones y reflexiones

Bibliografía

Referencias en páginas Web

Anexo I El pensamiento atomista y la Monadología

- A1.1 El pensamiento atomista de Leucipo y Demócrito
- A1.2 La Monadología de Leibnitz

Anexo II Elementos de la Lógica formal

- A.2.1 Diversos aspectos de la Lógica formal

Glosario

RESUMEN

Algunos estudios en Educación Matemática (Hiebert et al, 1997) al término, *Aprendizaje con Entendimiento* le asignan características que debe poseer el aprendizaje en relación con los conocimientos previos, su estructuración y la relación con conceptos centrales de la disciplina. Al respecto, la visión de la NCTM (NCTM, 2000) manifiesta que el diseño curricular de un plan de estudios debe estar guiado por una organización de contenidos alrededor de conceptos matemáticos centrales, de manera que permitan estructurar los conocimientos en forma ascendente (NAS, 2004 y NCTM, 2000). Para lograr este objetivo se menciona como elemento fundamental la Articulación de Saberes Matemáticos.

La presente investigación, de corte sistémico-lógico, pretende aportar elementos de tipo conceptual que apunten hacia una definición que identifique los procesos y aspectos implicados en lo que se ha denominado el “Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos”. Como ejemplo, con este instrumento se pretende estimar el nivel de articulación de saberes matemáticos que adquieren los estudiantes al concluir la discusión del tema: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

SUMMARY

Some research studies in Mathematics Education (Hiebert et al 1997), *call Learning with Understanding*, the learning characterized by its relation with previous knowledge, its structure and its relation with fundamental concepts of the discipline. At this respect, the NCTM vision (NCTM, 2000) points out that the curriculum should be designed and guided with an organization of contents around fundamental mathematical concepts in such a way it would allow to build knowledge in ascending and structure way (NAS, 2004 and NCTM, 2000). For this purpose, it is mentioned as a fundamental element, the Articulation of Mathematical Knowledge.

This research, with a logic-systemic view, pretends to contribute with conceptual elements that should point to a definition that identifies the processes and concepts involved in what is called “Mathematical Knowledge Articulation Phenomenon”. As an example, with this tool, it is pretended to estimate the articulation level of mathematical knowledge acquired by students after a discussion session of the topic: Linear Equations Systems.

Capítulo I

Definición del problema de Investigación

1.1 Antecedentes

La Educación Matemática plantea entre sus objetivos, el que los estudiantes cuando se adentran al estudio de los diversos temas matemáticos, logren articularlos de manera que puedan formar conceptos más complejos y sofisticados. Uno de los beneficios de adquirir esta cualidad de articular saberes, es que permite al estudiante resolver diversos problemas matemáticos presentados por el profesor o inclusive problemas de la vida cotidiana, obteniendo con ello la solución requerida, además de la ganancia intelectual que se alcanza, debido a que lo incentiva para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanza en sus estudios (NCTM, 2000, p.15).

A la anterior actividad, dentro de la Educación Matemática se le conoce como Articulación de los Saberes Matemáticos, que es análoga a la idea de que si se tienen las partes de un todo, lo único que resta por hacer es saber como ensamblar éstas, para lograr armar el enorme rompecabezas que conforma el todo. Por tanto, la Articulación de los Saberes Matemáticos se entiende como la conexión conceptual entre los diversos saberes matemáticos, conllevando con ello, la comprensión de las Matemáticas como un conjunto de saberes interconectados, que buscan propósitos específicos, como un gran cuerpo unificado de conocimientos.

La Articulación de Saberes Matemáticos de manera inicial, se encuentra presente en la estructuración de los programas y planes de estudio de las matemáticas escolares y en el diseño y estructuración de los libros de texto de matemáticas. Por todas estas razones, el estudio de su definición, el cómo y en quiénes se presenta la Articulación de los Saberes Matemáticos, se convierte en un objeto de investigación en la Educación Matemática.

La complejidad que presentan las ideas sobre articulación de saberes, se ve reflejada en la diversidad de estudios (presentados en el capítulo del estado del arte) que abordan algunas aproximaciones sobre ella. El estudio de algunos aspectos de la articulación de los saberes, tiene dos vertientes principales:

- Un enfoque psicológico, en donde la idea de la articulación de saberes se aborda como un proceso mental
- Un enfoque sistémico, en donde se concibe al conocimiento como un conjunto sistematizado y articulado de saberes

La primera dificultad de importancia que presenta el estudio de la Articulación de Saberes Matemáticos, es su adecuada caracterización, debido a la incipiente y aún

superficial investigación y experimentación en ella; por tal motivo, en el presente estudio se pretende aportar elementos de tipo conceptual, que apunten hacia una caracterización de su definición, los procesos y los aspectos implicados en ella, tomando como constructos teóricos elementales, la Teoría General de Sistemas y la Lógica formal.

Para comenzar a establecer el contexto para el presente estudio, se inicia por definir lo que se entiende por Articulación de Saberes Matemáticos. Como ya se ha mencionado, muchos de los aspectos más relevantes de la articulación surgen de donde se origina la enseñanza escolar de las matemáticas: el currículo escolar matemático; en él se puede observar que la naturaleza de los diversos aspectos sobre la articulación de los saberes matemáticos es compleja de origen; al respecto, Price (1997) señala:

“Nociones básicas como las de valor posicional, equivalencia, proporcionalidad, función y tasa de variación deberían ocupar un lugar prominente en el currículo, ya que capacitan para entender otras ideas y sirven de conexión entre diferentes áreas de las matemáticas. El pensamiento matemático y las habilidades de razonamiento, incluyendo formular conjeturas y desarrollar sólidos argumentos deductivos, tienen importancia porque sirven de base a nuevas ideas y promueven un estudio posterior. Muchos conceptos y procesos, tales como la simetría y generalización, pueden ayudar a profundizar en la naturaleza y belleza de las matemáticas. Además, el currículo debería ofrecer experiencias que permitan ver que esta disciplina se utiliza poderosamente para modelizar y predecir fenómenos del mundo real. Debería enfatizar también los procesos y destrezas que fundamentan la capacidad para cuantificar de los estudiantes.” (NCTM, 2000, p.16).

Uno de los organismos más importantes en Educación Matemática, la NCTM (2000) (*Nacional Council of Teachers of Mathematics /Asociación Norteamericana de Profesores de Matemáticas*), definió lo que se conoció como los “Principios y Estándares para la Educación Matemática”: el principio de igualdad, curricular, de enseñanza, de aprendizaje, de evaluación y tecnológico; y los estándares de números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de los datos y probabilidad, resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación. Estos principios y estándares representan una propuesta constructiva para el desarrollo de la Educación Matemática, resultado del esfuerzo conjunto de profesores de matemáticas de primaria y secundaria, de multitud de padres, grupos de expertos, seminarios de estudio, equipos de innovación, editoriales, matemáticos preocupados por la enseñanza, investigadores en educación y responsables, en general, del currículo de matemáticas. Estos abordan la complejidad de la educación matemática desde una perspectiva sistemática (NCTM, 2000, p. VII).

La visión de la Educación Matemática descrita en sus principios y estándares es sumamente ambiciosa. Llevarla a cabo requiere entre muchos factores, currículos matemáticamente sólidos (NCTM, 2000, p. 3). Un propósito de los principios y estándares es ofrecer a los profesores, diseñadores de currículos y a todos los responsables de establecer marcos curriculares, una forma de enfocarlos; el enfoque destaca la idea de continuidad. Con esto se espera que los estudiantes vayan alcanzando ciertos niveles de comprensión conceptual y de fluidez en los procesos, en determinados aspectos del currículo (NCTM, 2000, p. 8).

Específicamente, en el Principio Curricular (NCTM, 2000), un currículum matemático en los diversos niveles educativos (básico, medio y medio superior) se propone que deba poseer las siguientes características: ser coherente, articulado y con un fin práctico definido. Esto mismo se debe extender a cada uno de los bloques temáticos que lo integran; éste debe ser estructurado como un conjunto de ideas coherentes entre sí, permitiendo con esto que los estudiantes tengan un mejor entendimiento y comprensión de los conocimientos matemáticos presentados:

“En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. Su buena articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan en sus estudios” (NCTM, 2000, p.15).

Un currículo conformado de la manera anterior no tan solo proporciona una educación adecuada al estudiante, si no que también es importante para el profesor:

“El currículo debería proporcionar una guía que ayude al profesorado a conducir a sus alumnos a niveles crecientes de complejidad y profundidad de conocimiento. Tal guía requiere un currículo bien articulado, para que los profesores sepan qué matemáticas han estudiado sus alumnos en los niveles anteriores y qué debe enfatizarse en los siguientes” (NCTM, 2000, p.16).

Continuando con el análisis del Principio Curricular, se puede citar lo siguiente sobre la estructura que debe poseer el currículo matemático:

“El currículo consta de diferentes bloques temáticos pero todos están notablemente interconectados. Las conexiones deberían destacarse, tanto en el currículo realmente como en las lecciones y en el material de enseñanza. Secuenciar coherentemente las lecciones a lo largo de las unidades y los niveles de enseñanza, supone un desafío” (NCTM, 2000, p.15,16).

Un posible camino para proponer un constructo teórico, lo aporta el Estándar de Conexiones de la misma NCTM, que menciona:

“Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles” (NCTM, 2000, p.68).

Debido a la naturaleza análoga del conocimiento matemático y el plan de estudios matemático, estos muestran una estructura que recuerda a la de los sistemas en general, y que es el concepto sobre el que gira la llamada Teoría General de Sistemas, conocida también como Enfoque de Sistemas. En la década de los años treinta del siglo XX, empezó a surgir un nuevo enfoque científico, al que se llamó método de sistemas, el cual concibe que los sistemas no dependen de la naturaleza específica de éstos, sino que son comunes a sistemas de muy distinta naturaleza (físicos, biológicos, sociales, conceptuales, etc.). Este método parte inicialmente de las propiedades de cada sistema en particular, interpretando las simples semejanzas entre ellos (Klir, 1981, p.10). La razón por la que además se propone llevar a cabo la citada analogía, es la de visualizar al currículo como un sistema; esto basado en lo que aporta Bertoglio (1986):

*“En este sentido, la teoría de sistemas (o el **enfoque de sistemas**) toma una posición contraria (como metodología) al **enfoque reduccionista**. Mientras este último tiende a la subdivisión cada vez mayor del todo, y al estudio particular de estas subdivisiones, el enfoque de sistemas pretende integrar las partes para alcanzar una totalidad lógica o de una independencia o autonomía relativa con respecto a la totalidad mayor de la cual también forma parte”* (Bertoglio, 1986, p.21).

Si el currículo, según el Principio Curricular de la NCTM, pretende tener características de ser articulado, para evitar verlo como un aglomeramiento de temas sin ninguna relación entre sí, la Teoría General de Sistemas se convierte en una “metodología” para interconectar las partes que componen al currículo. Por tanto, se puede catalogar al currículo escolar como un sistema conceptual. Sus elementos están relacionados para lograr objetivos concretos, como los que cita el Principio Curricular, y que básicamente son características básicas de todo sistema.

Se puede advertir que los diversos bloques temáticos que constituyen al currículo, entendiéndose este como un sistema conceptual, se pueden considerar también como subsistemas del mismo tipo, debido a que están formados por conceptos; cada uno de estos bloques tienen identidad y características propias, además de que los vínculos entre ellos, conforman al currículo articulado total.

Se puede concluir en este punto que, basándose en la argumentación antes expuesta, el currículo oficial como lo presenta el Principio Curricular de la NCTM,

muestra claras evidencias para ser considerado un sistema de tipo conceptual; el Principio Curricular así lo deja entrever: *“Al planificar las lecciones, los profesores deberían esforzarse en organizar los contenidos para que las ideas fundamentales formen un todo integrado.”* (NCTM, 2000, p.:15). Por tal razón, los temas se pueden considerar como partes del currículo matemático (subsistemas), que presentan por ende, características propias de sistemas conceptuales.

Para fines de representación y experimentación en el presente estudio, los sistemas conceptuales se representaran como los llamados modelos conceptuales, que es una técnica propia del Enfoque de sistemas. A continuación, se explicará algunos aspectos relevantes sobre ellos.

La técnica para construir modelos conceptuales se basa en principios muy simples que se han verificado en muchos estudios de sistemas, llevados a cabo durante algunos años. El lenguaje básico empleado para la construcción del modelo, incluye a todos los verbos (conceptos o ideas) del lenguaje que habla el analista. Éstos tendrán que estar conectados entre sí para que representen al sistema como si fuera una entidad, y la forma más básica que esta conectividad podría tomar es la de un número de flechas que indican dependencias lógicas. Donde parezca esencial el representar un flujo (información o acciones), se debe indicar la naturaleza de dicho flujo.

Para ilustrar estos principios, la figura 1.1 representa la naturaleza general de un modelo conceptual. En este sistema **nocional**, seis actividades conectadas constituyen un proceso de transformación que genera reportes periódicos y requiere entradas de información. La actividad 4, que el verbo 4 describe, requiere el terminado de antemano de las actividades 1 y 2 (verbos 1 y 2). La actividad 5 depende de la 4 y 3, y posibilita que se lleve a cabo la actividad 6, siendo ésta última el origen de la salida de sistema (Checkland, 1993, pp. 319).

La tarea de construcción de los modelos conceptuales consiste simplemente en ensamblar la lista de verbos que describen las actividades, conectarlos de acuerdo con los requerimientos de la lógica e indicar cualquier flujo que parezca esencial en este primer nivel de resolución.

Una vez que esta versión del modelo se haya construido, puede usarse como base para versiones más expandidas. Algunas quizá muestren actividades en niveles más detallados, o registren todos los flujos en el sistema. Un proceso para su elaboración frecuentemente consiste en preguntar acerca de cada actividad: ¿qué información es necesaria para llevar a cabo esta actividad?, ¿a partir de qué recurso?, ¿con qué frecuencia?, ¿en qué forma?, etc. (Checkland, 1993, pp. 320).

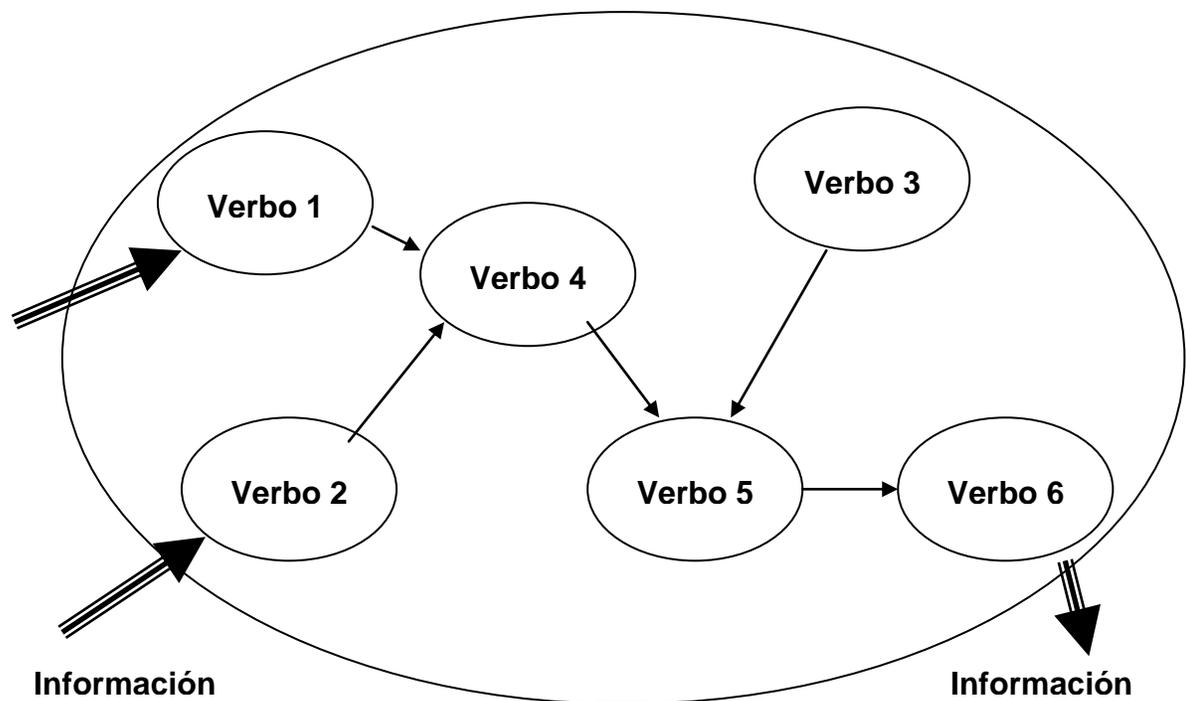


Figura 1.1. Ilustración de la forma general de un modelo conceptual

1.2 Definición del problema de investigación

Si se tiene una caracterización lo suficientemente robusta de lo que significa la Articulación de Saberes Matemáticos, entonces es posible definir el problema de cómo identificar y medir el grado de articulación en un currículo matemático escolar, pero por razones prácticas, es necesario acotar el estudio de la “medida de articulación”, de un currículo entero a un bloque temático particular de éste. El tema matemático, parte del currículo matemático, seleccionado para el presente estudio que representa aspectos relevantes sobre la articulación, es el de los sistemas de ecuaciones lineales, debido a la importancia que tiene dentro del currículo matemático escolar. En el presente estudio se abordará los elementos conceptuales relacionados con su definición.

De tal manera, **el problema de investigación del presente estudio es el de estimar o medir el grado o nivel de articulación de saberes matemáticos, en el tema de la definición de los sistemas de ecuaciones lineales, en un grupo de estudiantes universitarios homogéneo (que tenga un solo profesor), de un curso de Álgebra Lineal, con el fin de conocer en que estado se encuentran las ideas sobre Articulación de Saberes Matemáticos, entre los estudiantes.**

Existen dos razones por las que se eligió el tema de los sistemas de ecuaciones lineales para el estudio de la medida de Articulación de Saberes Matemáticos: la primera, porque es el tema central de toda una rama de conocimiento matemático (Álgebra Lineal), como lo menciona Herstein y Winter (1989), lo cual lo hace un bloque temático del currículo matemático bastante interesante de investigar; y, segunda, porque son objetos matemáticos que presentan ciertas características interesantes, debido a su enorme aplicación en muy variados temas matemáticos y disciplinas. Herstein y Winter (1989) hablan de ello al respecto:

“El tema de teoría de matrices y álgebra lineal, se presenta en una gran variedad de campos. Huelga decir, en virtud de su propio nombre, que desempeña un papel destacado en el álgebra y, en realidad, en casi todas las ramas de las matemáticas. No es del todo sorprendente que su esfera de aplicación sea mucho más amplia; existen pocas áreas de la ciencia y de la ingeniería en las cuales no haga su aparición. Lo que es más asombroso es el grado hasta el cual los resultados y técnicas de esta teoría se aplican también, cada vez más, en disciplinas como economía, psicología, administración de empresas y sociología..... Cuando se arribe al planteamiento más abstracto del álgebra lineal, los temas adquirirán una mayor unidad y cohesión. Incluso tendrán, así se espera, un gran atractivo estético.”
(Herstein y Winter, 1989, p.1,2).

Lo anterior permite visualizar en el tema de los sistemas de ecuaciones lineales la existencia de una articulación interna y externa. Se denomina articulación interna a las interconexiones que presentan los sistemas lineales con otros conceptos del álgebra lineal, como lo es la teoría de matrices, así como con otras ramas de conocimiento matemático: álgebra (funciones y ecuaciones multivariadas lineales, así como la resolución de sistemas de ecuaciones de este tipo, por medio de métodos analíticos), geometría (representación de puntos en espacios geométricos, por medio de matrices de orden n), métodos numéricos (búsqueda de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales mediante soluciones numéricas), por mencionar algunas. Por otro lado, la articulación externa se refiere a las interconexiones de los sistemas de ecuaciones lineales con otras disciplinas científicas y tecnológicas; por ejemplo, en Termodinámica (determinación de temperaturas en el interior de una placa metálica, cuando ésta se le somete a un calentamiento), Estática (cálculo de las fuerzas en una estructura que soporta cargas como puentes o edificios), Electricidad (determinación de voltajes y corrientes en una red eléctrica); en los negocios y economía (búsqueda del equilibrio entre la oferta y la demanda de un producto en venta, programación de la producción de productos, distribución de recursos en un proceso de producción industrial), en ciencias de la vida, como lo es Nutrición (estimación de dietas alimenticias de animales para experimentos o alimentación de personas), Psicología (acercamiento y evitación a experiencias agradables o desagradables de animales de laboratorio); en las Ciencias Sociales como la Sociología (programación de horas para el levantamiento de entrevistas

telefónicas sobre las opiniones con respecto a los servicios educativos en una ciudad), por mencionar algunos.

1.3 Preguntas de investigación

En el problema de la Articulación de los Saberes Matemáticos, intervienen elementos de diversa naturaleza. En el presente trabajo de investigación, es de interés abordar los aspectos sobre el conocimiento en si mismo. Por esta razón, las preguntas formuladas para el presente estudio, y que se pretende responder son:

¿Qué elementos conceptuales intervienen en la articulación de los saberes que integran los sistemas de ecuaciones lineales?

¿Cómo se puede “medir” o estimar el grado de articulación en el tema de los sistemas lineales?

1.4 Hipótesis

Rico, Sierra y Castro (2000, p. 352) consideran la Educación Matemática como “*todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas*” que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De forma paralela, para Steiner (1985, pp.11 a 17), la Educación Matemática es una interpretación global **dialéctica** como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica (Godino, 2004, p. 2) ^[9].

Dentro de los múltiples estudios existentes de la Educación Matemática, las investigaciones sobre el currículo matemático constituyen un área de estudio de extraordinario interés (Rico, 1990). La investigación sobre el currículo utiliza resultados de otros campos de la Educación Matemática (teorías del aprendizaje fundamentalmente) y trata de ser una indagación sistemática para comprender o mejorar, entre otras cosas, la selección y estructuración de las ideas matemáticas a enseñar. Estas investigaciones se interesan, en gran medida, por comprender las combinaciones de contenido y secuenciación de los bloques temáticos que constituyen el plan de estudios (Godino, 2004, p. 26) ^[9]. Por otro lado, la investigación se está orientando hacia análisis microscópico del proceso curricular y hacia la búsqueda de los efectos que se esperan de una aproximación particular en situaciones y contenidos particulares (Godino, 2004, p. 27) ^[9].

Las ideas sobre el contenido que se enseña, son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Romberg, Small y Carnaham (1979), localizaron cientos de

estudios que valoraban la efectividad de casi todos los aspectos concebibles de la conducta docente, pero encontraron pocos modelos de instrucción que incluyeran la componente del contenido. Sin embargo, se reconoce la necesidad de acometer investigaciones que tengan en cuenta el contenido específico y las técnicas didácticas apropiadas para tal contenido (Godino, 2004, p. 27) ^[9]. Sobre este aspecto, se encuentra cimentado el presente trabajo. Se han identificado dos pilares conceptuales que dan cimentación a enfoque del currículo matemático escolar como un constructo de conocimiento: el enfoque de los sistemas conceptuales y las aportaciones conceptuales de la Lógica formal. Ambas corrientes científicas encuentran cabida en el contexto de las investigaciones actuales en Educación Matemática. A continuación se describirán como estas dos disciplinas colaboran en la definición de la presente investigación.

Una característica principal de la Educación Matemática es la de su extrema complejidad. Como describe Steiner (1984, p. 16), esta disciplina comprende:

"El complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno" (Godino, 2004, p. 30) ^[9].

Esto ha llevado a distintos autores al uso de la Teoría de Sistemas para su consideración teórica. La noción interdisciplinar de sistema, y que se revela necesaria siempre que se tengan razones para suponer que el funcionamiento global de un conjunto de elementos no puede ser explicado por el simple agregado de los mismos, y que incluso el comportamiento de estos queda modificado por su inclusión en el sistema. En la Educación Matemática el enfoque sistémico es claramente necesario, pues, se aplica en tres tipos distintos de contexto: a) el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto; b) el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales; y c) los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado. En el presente estudio sólo es de interés abordar el segundo enfoque presentado: el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales, debido a que el estudio se centra en la conformación conceptual del currículo escolar matemático.

La aproximación sistémica para los problemas didácticos es esencial ya que, como afirma M. Artigue (1984):

"Muestra que la Educación Matemática se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe, como consecuencia, desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, aunque sin despreciar los

aportes de las disciplinas conexas, en particular la psicología y la epistemología” (Godino, 2004, p. 31) ^[9].

Por lo tanto, la presente investigación se identifica en su estructuración, con la Teoría General de los Sistemas, como una de sus principales columnas conceptuales, debido a su enorme capacidad integradora de conceptos e ideas científicas.

Por otro lado, Higginson (1980), propuso un modelo de las relaciones de la Educación Matemática con otras disciplinas, quien considera a la Matemática, Psicología, Sociología y Filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de ésta. Visualiza a la Educación Matemática en términos de las interacciones entre éstas cuatro disciplinas (Godino, 2004, p. 3) ^[9]. De forma parecida se expresa Brousseau (1989), indicando que la Educación Matemática se distingue como una área de conocimiento científico, concebido como *“el campo de investigación llevado a cabo sobre la enseñanza en el cuadro de disciplinas científicas clásicas”*, como son: la Psicología, la Semiótica, la Sociología, la Lingüística, la Epistemología, la Lógica, la Neurofisiología, la Pedagogía, la Pediatría, el Psicoanálisis,... En este caso, la naturaleza del conocimiento didáctico sería el de una tecnología fundada en otras ciencias (Godino, 2004, p. 29) ^[9].

Es de notarse que ambas concepciones presentadas, sobre las disciplinas científicas que convergen en la Educación Matemática, y las diversas coincidencias que presentan, se encuentra el caso particular de la Lógica, ya que es bien conocido que ésta es una ciencia perteneciente al terreno de la Filosofía (Ibarra Barrón, 1998, pp. 30 a 34). La Lógica es la ciencia que estudia las leyes del pensamiento, su estructura, sus formas y relaciones, así como la estructura de la ciencia y su metodología. También se le conoce como *“la ciencia que estudia las estructuras del pensamiento”* (Ibarra Barrón, 1998, p. 71 y 72).

Es posible que en el ámbito de estudio de la Lógica, se pueda observar coincidencias o aspectos que al parecer, pertenecen a otros campos de estudio, como podría ser el caso de la Psicología, y con ello, desvirtuarse el enfoque presentado en la actual investigación. Para distinguir las diferencias sustanciales entre estas dos disciplinas, Lógica y Psicología, se podría mencionar, para comenzar que la Lógica pone en lugar de representaciones, juicios normativos invariantes y pensados e investiga el pensamiento en lo que concierne a su corrección o falsedad; en cambio, la psicología no se interesa por esta referencia, aunque esté en su campo de investigación en general; la Lógica hace una referencia de valor entre corrección y falsedad, lo que para la Psicología no es trascendente; la Lógica ofrece normas y leyes para explicar y fundamentar el pensamiento, la Psicología deja esta labor a otras ciencias. Los problemas que la Psicología busca resolver, como son el inconsciente, los procesos psico-neurológicos, la conducta, etc., no son los mismos que preocupan a la Lógica ni tampoco sus métodos de estudio son iguales, aunque en última instancia recurran

a la razón. A pesar de estas diferencias, la Lógica y la Psicología mantienen estrechas relaciones entre una y otra, y utilizan sus resultados para avanzar en sus respectivos campos, lo que permite ver que su autonomía es relativa, ya que no son ciencias aisladas (Ibarra Barrón, 1998, p. 64).

De tal forma, la lógica tiene como objeto de estudio los principios y leyes que debe cumplir el pensamiento o razón para ser correcto y verdadero; cuáles son los principios y normas para definir el pensamiento; qué es una definición; cuáles son sus reglas y sus errores; cuáles son sus límites; en qué consisten las operaciones conceptuadoras; cuál es el universo del razonamiento, etc. Como afirma Kant en su "*Lógica*", en la Lógica no se trata de leyes contingentes, sino necesarias; no se trata de saber cómo pensar, sino cómo debemos pensar (Ibarra Barrón, 1998, p. 70, 71).

El estudio de la Lógica permite pasar del conocimiento empírico de las cosas al conocimiento científico, del conocimiento vulgar, fenoménico, de la mera opinión, al conocimiento fundado, estructurado, a la razón primera, al concepto del todo ricamente articulado y comprendido, a la rica totalidad de las múltiples determinaciones y relaciones. El estudio de la Lógica obliga a pensar de un modo más preciso, logrando que los argumentos sean más exactos y ponderados; se cometen menos errores. Se aprende además el arte de la concentración, de la abstracción, de penetrar en la esencia de las cosas. Enseña la vía del pensamiento correcto y verdadero, el pensamiento de sí mismo, del potencial intelectual, reflexivo, de análisis, de síntesis, así como el de los procesos físicos, químicos, históricos, económicos, matemáticos, etc. (Ibarra Barrón, 1998, p. 72 y 73); de ahí la enorme importancia de la Lógica como guía rectora en la definición del acto de pensar, que se produce cuando los sujetos llevan a cabo el acto de articular saberes matemáticos.

Debido a que la Lógica investiga las formas metódicas del pensamiento científico, las estructuras fundamentales que hacen posible los variados conocimientos verdaderos; consta, como la matemática, de un conjunto de leyes, de una serie de principios, evidentes por sí mismos; es decir, de axiomas en los que se fundamentan todas sus demás leyes, como el principio de identidad, de no contradicción, etc., pero no por ello se puede reducir a la matemática. Actualmente, la Lógica y la Matemática tienen un campo de acción, objeto de estudio y problemas diferentes, pero aún así no son antagónicas y se interrelacionan recíprocamente. Una aprovecha los resultados de la otra y viceversa (Ibarra Barrón, 1998, p. 66). Es de notarse que al verse los vínculos que existen entre estas dos disciplinas científicas y los aspectos conceptuales que tienen en común, la presente investigación aprovecha la riqueza conceptual de la Lógica, para definir y enriquecer un concepto con un fuerte contenido matemático, que es la Articulación de Saberes Matemáticos.

Por tal razón, y en base a todo lo antes dicho, de ahí que la Lógica pueda utilizarse en el contexto del presente trabajo, como el otro gran pilar conceptual que conforma el marco teórico presentado. Tanto el Enfoque de Sistemas, como las aportaciones de la Lógica, permiten dar como resultado las consideraciones teóricas presentadas

en la actual investigación sobre la definición y caracterización de lo que se podría entender como Articulación de Saberes Matemáticos.

En definitiva, se propone responder a las preguntas de investigación presentadas con anterioridad con una investigación de corte sistémico-lógico. Inicialmente se definirá de un marco teórico que aborde los elementos más relevantes de la articulación de saberes matemáticos, y que apoyados en la técnica de los modelos conceptuales, propia de los sistemas del mismo tipo, sea posible diseñar un test que permita estimar el grado de articulación de los estudiantes, sobre el tema de los sistemas de ecuaciones lineales.

Las actividades específicas a realizar en el presente estudio, son:

- Realizar un estudio sobre investigaciones similares, con el fin de recabar aspectos relevantes sobre la Articulación de Saberes Matemáticos
- Definir un marco conceptual lo suficientemente robusto, en base a conceptos de la Teoría General de Sistemas y la Lógica Formal, para caracterizar de manera completa la Articulación de Saberes Matemáticos, con el fin de tener elementos teóricos suficientes para sustentar la posterior experimentación.
- Llevar a cabo un estudio conceptual de las interconexiones internas que presenta el tema de los sistemas de ecuaciones lineales, en libros matemáticos de nivel superior, con el fin de construir posteriormente, un test que permita estimar el grado de articulación que poseen los estudiantes, con respecto a la definición de los sistemas lineales.
- Aplicar el test previamente diseñado, que trata sobre la definición de los sistemas de ecuaciones lineales, con el fin de “medir el grado de articulación” a una población homogénea de estudiantes, que tomen un curso de Álgebra Lineal.
- Realizar el análisis cualitativo de los resultados obtenidos del test aplicado.
- Generar las conclusiones y reflexiones respectivas.

Finalmente, se puede mencionar que el tema de articular saberes matemáticos es poco conocido e investigado, ya que es una línea de investigación muy poco explorada y desarrollada actualmente en la enseñanza de las matemáticas escolares. Una de las principales aportaciones del presente estudio, es proporcionar un posible marco de referencia para futuras investigaciones sobre este campo.

1.5 Estructura del trabajo

El aprendizaje no se produce por una mera suma o acumulación de nuevos contenidos, sino que es el producto de conexiones y relaciones entre lo nuevo y lo ya conocido. Es un proceso global que será más rico si se ofrece la posibilidad de que las relaciones que establezca y los conocimientos que construye, sean amplios y

diversificados. Es en esa necesidad de integrar los llamados saberes previos, que reside la importancia de la articulación y la continuidad en la construcción de los conocimientos. Es por eso que es importante tener en cuenta los diversos puntos de partida de los alumnos en relación con los contenidos y considerar los distintos ritmos de aprendizaje. ^[12]

El concepto de articulación es mencionado cuando se intenta identificar las características del aprendizaje de los estudiantes. La ausencia o falta de articulación, se menciona en toda reunión de profesores, en busca de una respuesta a las problemáticas del aprendizaje. Sin embargo, es poco lo que se ha escrito al respecto; las conceptualizaciones existentes tienen mucho de intuitivo y son escasos los trabajos de investigación indagando en esta cuestión. En este trabajo de investigación se intenta analizar y describir lo que se conceptualiza, como el fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos.

Por ejemplo, para documentar la importancia que tiene el estudio de la articulación de los saberes en la escuela, por dar un ejemplo, en la República de Argentina, en su Ley Federal de Educación (1993), en su artículo 12, expresa que la articulación es necesaria: *“...para facilitar el pasaje y la continuidad, y asegurar la movilidad horizontal y vertical de los alumnos/as de un ciclo a otro y de un nivel a otro”*. Desde este marco legal, la articulación es una necesidad para generar una mejor calidad de los aprendizajes, atender la diversidad y evitar el fracaso escolar (Borgognone et al., 1997). ^[5]

Lo anterior sólo es una muestra más de la evidente necesidad de abordar la caracterización del tema de la articulación, dentro del currículo escolar, que es la guía de todo el proceso de enseñanza en el ambiente educativo. Por tal motivo, el presente estudio busca abordar los aspectos más relevantes de la articulación de saberes matemáticos y dar un panorama general del estado en que se encuentran estas ideas entre los estudiantes; dicho estudio se encuentra plasmado en el presente documento, el cual se encuentra organizado de la siguiente forma:

En el capítulo II se hace una exposición general sobre el concepto de la articulación en diversas disciplinas, así también se abordan antecedentes de carácter histórico, de donde surgen los principios básicos de la articulación; se ofrece su concepto en el contexto de la Educación Matemática, así como su caracterización como el Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos. Se definen y caracterizan detalladamente los componentes del fenómeno de la articulación: el sistema conceptual (o currículo escolar), el sujeto que articula, el tiempo que requiere éste para realizarla, así como el proceso de articular, con sus respectivos niveles de articulación. También se mencionan aspectos del efecto que produce el fenómeno de la articulación en los individuos que llevan a cabo el acto de articular, denominado la adquisición del Conocimiento Matemático Articulado.

En el capítulo III se abordan algunas de las investigaciones realizadas en los últimos años con enfoques cognitivos y pedagógicos, que presentan relación con la investigación actual sobre el Fenómeno de Articulación de Saberes Matemáticos.

En el capítulo IV se dan a conocer los diversos elementos conceptuales tomados en cuenta para el diseño de un test que estima el nivel conceptual que poseen los estudiantes, sobre aspectos de articulación de saberes matemáticos, específicamente en el tema de los sistemas de ecuaciones lineales.

En el capítulo V se muestran los resultados del análisis del test de estimación de articulación aplicado a un grupo de estudiantes universitarios, con el fin de mostrar una medida del grado de articulación que éstos poseen, sobre el tema de sistema de ecuaciones lineales.

En el capítulo VI se abordan las conclusiones y reflexiones generales del estudio.

En el Anexo I se presentan las ideas más relevantes sobre las corrientes filosóficas del atomismo griego y la monadología de Leibnitz, bases conceptuales que se usan para definir los principios de articulación.

En el Anexo II se presentan algunas de las concepciones relacionadas con el proceso de adquisición de conocimiento, desde el punto de vista de la Lógica.

Capítulo II

Marco Teórico

Estudios recientes han documentado que uno de los elementos importantes en el aprendizaje de las matemáticas es el adquirir conocimientos que sean ordenados, coherentes y principalmente, articulados (NCTM, 2000, p.16); sin embargo, surge una pregunta básica y fundamental: ¿qué significa articular?; en este apartado se presenta una discusión desde varios ángulos, de lo que se ha entendido por articular; consideramos inicialmente las distintas acepciones del concepto en diferentes áreas científicas o de aplicación.

2.1 Concepciones sobre Articulación

Inicialmente, el término Articular en sus raíces latinas se entiende como: a) (verbo *articulare*; de *articulus*: nudo): unir, juntar; y b) (adjetivo *articularis-are*; de *articulus,-i*) perteneciente o relativo a las **articulaciones** o a la articulación. (Mateos, 2004, p.86). Hay que hacer notar que dichas definiciones poseen meramente un punto de vista biológico, haciendo referencia a la forma en como las partes o miembros que conforman los organismos vivos, se encuentran interconectados. Se puede considerar que ésta es la primera definición de raíz del concepto, que sirve de base para las definiciones propias en otras disciplinas.

En Botánica, la articulación se entiende en las plantas, como el enlace que se forma en la unión de una parte con otra, las cuales pueden desgajarse. ^[8] En medicina, una articulación es el área o conjunto de estructuras que unen dos o más huesos (ver figura 2.1). ^[14] En la **Fonética Articulatoria** se estudian los sonidos de la lengua desde el punto de vista fisiológico; es decir, describe qué órganos orales intervienen en su producción, en qué posición se encuentran y cómo esas posiciones varían los distintos caminos que puede seguir el aire cuando sale por la boca, nariz, o garganta, para que se produzcan sonidos diferentes (ver figura 2.2). ^[15]

En Física, con un enfoque meramente mecánico, la articulación se define como la unión entre dos piezas rígidas que permiten cierto movimiento entre ellas. ^[8] Consecuentemente, en Mecánica, se entiende como el enlace o unión entre dos piezas de una máquina que permite y ordena su movimiento (ver figura 2.3). ^[8]

Pero no sólo se puede concebir la idea de articular miembros o partes de organismos vivos o artefactos mecánicos; también es posible realizar articulación de elementos conceptuales, propios del terreno intelectual. Un ejemplo de esto lo muestra la Lingüística, cuando se refiere al carácter articulado, el cual se entiende como las unidades lingüísticas mayores que son divisibles en partes más pequeñas, reconocibles e intercambiables. El **signo lingüístico** es doblemente articulado,

porque puede someterse a una doble división. Según la primera articulación, el signo se descompone en partes con **significado y signifiante**, susceptibles de ser utilizadas en otros contextos. Las unidades de esta primera articulación se denominan **monemas**. Según la segunda articulación, el signo se divide en unidades más pequeñas sin significado, pero que son distintivas. Las unidades de esta segunda articulación son los **fonemas**. Si un signo lingüístico cambia algún fonema, cambia también su significado. [8]

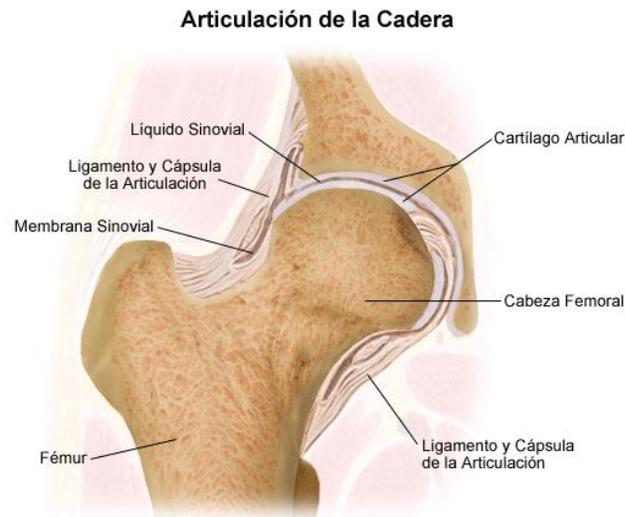


Figura 2.1. Articulación de huesos humanos

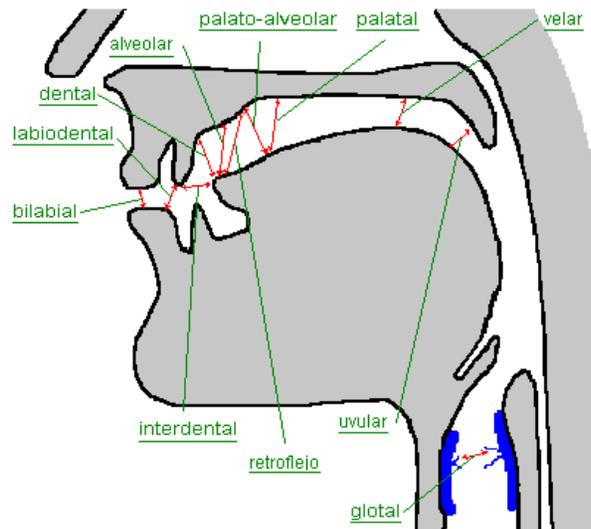


Figura 2.2. Articulación de los órganos orales relacionados con la voz humana



Figura 2.3 Articulación mecánica

Siguiendo con un enfoque de carácter intelectual, en Docencia, “articular” se refiere a los acuerdos establecidos, con respecto a los contenidos a enseñar en cada nivel, ciclo o curso de una institución. Para otros implica la participación de los alumnos en aquellas "actividades propias" de cada nivel o ciclo por un corto período de tiempo, (de jardín de niños a primero o de sexto a primer año, etc.), de manera tal que el impacto, al pasar de un nivel a otro no de lugar a rupturas o conflictos, olvidándose muchas veces considerar que la articulación implica vínculos y conexiones entre los contenidos conceptuales. Al respecto, se consideran dos tipos de articulación: a) Articulación horizontal: la enseñanza debe organizarse en sus niveles como un todo que posibilite al sujeto acceder al más alto grado de formación posible; b) Articulación vertical: las diversas modalidades de cada nivel, serán estructuradas con un criterio de equivalencia de manera tal que permita el tránsito de una a otra. ^[5]

Finalmente, en Filosofía, la disciplina que por excelencia trata de las ideas, se entiende por articulación como lo opuesto a la mezcla indiscriminada de elementos contradictorios entre sí, característicos del **método ecléctico**. La articulación se establece de forma tradicional, como el interrelacionar las ideas en el proceso evolutivo de las corrientes progresistas y revolucionarias del pensamiento. ^[2]

Apoyándose en las anteriores definiciones, se puede comenzar a enumerar algunos de los elementos característicos de la articulación, según las disciplinas antes mencionadas:

1) Según el enfoque de la Biología, Medicina, Fonética Articulatoria, Física y Mecánica, la articulación considera que las partes que forman el todo, no sólo se encuentran estructuradas e interrelacionadas de forma similar a como se conciben los elementos de una máquina u organismo, sino que además, estas partes interactúan para lograr un propósito o función específica: el movimiento.

2) En el enfoque de la lingüística, la articulación es considerada como la unión de las partes que conforman el ente articulado, las cuales:

- Poseen por si mismas un valor conceptual apreciable
- Pueden ordenarse de muchas maneras; es decir, presentan múltiples configuraciones
- Pueden ser divididas en elementos más simples (elementos primarios), que no presentan rasgos de articulación.

- El todo articulado se puede someter a una Desarticulación, para obtener las partes que lo integran; éstas, a su vez, pueden ser reutilizadas como elementos constituyentes de otros entes articulados en otros contextos.

3) Para el punto de vista de las ciencias de la educación, la articulación debe presentar ciertas características:

- Debe existir la relación y seriación de conocimientos a enseñar
- Los individuos, por si mismos, deben tener la capacidad de relacionar los conocimientos aprendidos
- La articulación es la forma en que se puedan alcanzar objetivos educativos fijados anteriormente, permitiendo el avance gradual de los estudiantes por los diversos niveles de sofisticación del conocimiento

4) Finalmente, desde la perspectiva filosófica, la articulación se concibe en base a su concepción contraria, debido a que en la ausencia de un ente Articulado, solo puede existir un ente No-Articulado, el cual se concibe como a) un conglomerado o aglomerado de partes conceptuales (objetos o conceptos), sin ninguna interrelación entre ellas, y b) puede existir interrelación entre objetos o conceptos, pero sin que estos persigan un fin específico. Se entiende por concepto a la *“representación simbólica de una idea abstracta y general”* (Diccionario Océano Uno, 1992).

En base a lo anterior, se puede observar que se presentan algunos elementos similares en los diversos puntos de vista presentados, de los cuales se podría decir de manera inicial, que son los componentes elementales de la articulación, los cuales son: a) los elementos o partes implicadas; b) las relaciones o vínculos entre ellas; c) el propósito u objetivo a alcanzar, previamente especificado; y d) los individuos que realizan las actividades articuladoras.

2.2 Antecedentes históricos sobre la idea de la articulación

En la era moderna, a finales del siglo XX (principios de los años 90's), los investigadores de la NCTM plasmaron en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, el concepto de articulación, debido a que el currículo matemático no solamente debe ser un cúmulo de conocimientos, sino que además debe mostrar las interconexiones existentes y evidentes en el saber matemático escolar.

Pero las ideas sobre articulación, como muchas otras, no son nuevas. Es posible observar su surgimiento y existencia en campos del conocimiento diferentes a la enseñanza actual de las matemáticas. Las primeras referencias que se tienen, es en el terreno de las ideas filosóficas; y, como mencionaba Leibnitz, éstas ideas bien podrían llegar a ser consideradas parte de una *philosophia perennis*, la cual debía

retomarse, por muy antigua que fuese. A este respecto, Leibnitz escribe en una carta a Nicolás Remond lo siguiente:

“La verdad se haya más difundida de lo que se cree, pero se encuentra a menudo demasiado compuesta, y también a menudo muy envuelta y hasta debilitada, mutilada, corrompida por añadidos que la echan a perder o la hacen menos útil. Si se pusieran de relieve esas huellas de la verdad en los antiguos o en los filósofos anteriores a nosotros, se extraería el oro del barro, el diamante de su mina, y la luz de las tinieblas, y esto sería algo así como una ‘filosofía perenne’.”^[3]

Se ha identificado la existencia de las nociones sobre articulación en el pensamiento filosófico del atomismo de Leucipo y Demócrito, en el mecanicismo cartesiano y la monadología de Leibnitz; de estas corrientes filosóficas, y usando un razonamiento por analogía, se han extraído algunas ideas primigenias sobre la articulación, que dentro del contexto del Fenómeno de la Articulación de los Saberes Matemáticos, se les denominará de aquí en adelante, los “Principios de la Articulación”.

2.2.1 El Atomismo ^[16.1 a 16.17]

El atomismo es un sistema filosófico que surgió en Grecia en el siglo IV a.d.C; según el cual el universo está constituido por combinaciones de pequeñas partículas denominadas átomos (ver Anexo I). Esta concepción de la naturaleza fue absolutamente materialista, y explicó todos los fenómenos naturales en términos de número, forma y tamaño de los átomos. Fue fundado por Leucipo (ver figura 2.4) y desarrollado mas tarde por Demócrito (ver figura 2.5); parece ser que a Leucipo se deben las ideas básicas de la concepción atomista, mientras que a Demócrito se le debe su desarrollo, difusión y articulación en un sistema filosófico completo y coherente. La visionaria concepción de la teoría atómica de Leucipo, estuvo basada puramente en especulaciones metafísicas; según él, todo se reduce a la unión y separación de los átomos, partículas primitivas e indestructibles. Las dos ideas fundamentales de Leucipo son lo lleno y lo vacío. El atomismo presenta una explicación materialista de lo real: todo es el resultado de la agregación y variada combinación de los átomos.

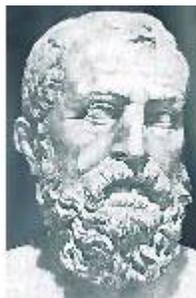


Figura 2.4 Leucipo (aprox. 470 a 360 a.C.)

2.2.1.1 El pensamiento atomista y los principios de la articulación

Para comenzar, la concepción del atomismo tiene una fuerte esencia de tipo sistémico: para Demócrito, la materia esta formada por grandes cantidades de átomos que debido a su movimiento inherente, y a las leyes naturales cognoscibles, tienden a formar agrupaciones con ciertas relaciones o vínculos entre ellos, buscando un propósito específico, el cual es formar toda la materia, seres vivos y los diversos mundos existentes en el universo. Es otras palabras, las partes interrelacionadas forman el todo. De lo anterior, se sugiere el primer principio:

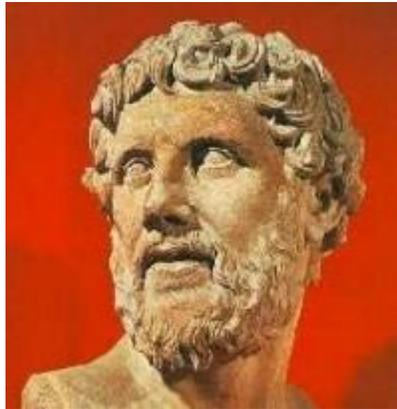


Figura 2.5 Demócrito de Abderea (470 a 360 a.C)

El primer principio: el todo como un sistema: **“Dentro del Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos, el componente que refleja concretamente los aspectos elementales sobre la articulación, es el sistema conceptual (currículo escolar), el cual se encuentra conformado por un conjunto de elementos de tipo conceptual, que mediante su adecuada organización (información neguentrópica), poseen interconexiones entre éstas partes, y que buscan alcanzar un fin u objetivo específico prefijado.”**

La noción de movimiento que se maneja en el atomismo, desde el punto de vista mecánico, lleva a considerar implícitamente la idea del tiempo. Dicho movimiento se da en pasos o etapas, los cuales se desarrollan en un lapso determinado. En otras palabras, se esta frente al concepto de proceso; si aunado a esto, la concepción atomista induce a la idea sistémica, no es extraño pensar que el concepto de proceso es la manera en que se forman los sistemas. Se ha mencionado que el ente articulado puede ser un sistema conceptual, el cual tuvo que pasar por una serie de acciones para llegar a lo que éste es; por tanto, este acto de articular se puede caracterizar como un proceso. El segundo principio así lo expresa:

El segundo principio: la articulación como un proceso: **“Es posible concebir al acto de articular como un proceso. El proceso de articular se entiende como la secuencia de pasos o acciones de carácter intelectual, efectuados en un**

período de tiempo determinado, sobre las partes a articular, y que da como resultado al ente articulado.”

El atomismo da pauta, no solo a ver el universo en forma de un sistema, o mejor aun, de cómo se encuentra articulado, sino que da indicios de cómo el proceso de articular se va desarrollando: existen dos elementos primarios, los átomos y el vacío; los átomos forman conglomerados con ciertos arreglos específicos denominados materia; la materia, en infinitas configuraciones y de acuerdo con diversos propósitos, forma todo cuanto se conoce: los seres vivos, los diversos mundos y el universo entero. Por lo cual, se puede concluir que la articulación se lleva a cabo por etapas o niveles, que van evolucionando en complejidad. El tercer principio así lo especifica:

El tercer principio: la existencia de los niveles de la articulación: **“Se distinguen tres etapas o niveles de la articulación: en primer lugar (Nivel 1), se identifican lo que son las partes a articular y las que no lo son; en segundo lugar (Nivel 2), éstas partes forman estructuras debido al compaginamiento de las partes implicadas y finalmente, en tercer lugar (Nivel 3), las estructuras se convierten en sistemas, al poseer un objetivo o fin a alcanzar por éstas.”**

Así como se concibe la agrupación e interrelación de los átomos en los seres vivos, así también para Demócrito, es posible su disgregación cuando éstos mueren; esto sugiere la viabilidad de la existencia de un estado inverso a la articulación, denominado desarticulación; de esto trata el cuarto principio:

El cuarto principio: la factibilidad de la desarticulación: **“la posibilidad de la desarticulación en el ente articulado se presenta cuando éste pierde inicialmente el propósito para el cual se encontraba articulado; a continuación, las partes pierden las interconexiones entre si (aumento de la entropía en el sistema), conllevando con ello, finalmente, la desintegración del sistema, en las partes que lo constituyen.”**

El atomismo de Demócrito habla de que es posible una infinitud de mundos posibles, debido a la infinitud de combinaciones de los mismos átomos. La diversidad en los sistemas puede explicarse por tres razones: a) la forma y tamaño de los átomos; b) el número de éstos, y c) las relaciones de orden y posición entre los átomos. El quinto principio lo generaliza de la forma siguiente:

El quinto principio: los múltiples caminos de la articulación: **“es posible que los elementos a articular, al interconectarse entre ellos, pueden originar múltiples configuraciones estructurales dentro de los entes articulados. Esto se debe a tres razones principales: a) el tipo de los elementos o partes implicadas; b) el número de éstos, y c) la forma en como se encuentran interconectados.”**

Finalmente, la articulación concebida bajo los anteriores principios, se le concibe como un ente articulado (sistema) que se alcanza por seguir un proceso de articular;

pero las ideas filosóficas sobre el mecanicismo, posteriores a los atomistas griegos, nos aportan elementos adicionales para ampliar nuestra concepción sobre los principios de la articulación, específicamente las ideas de Rene Descartes y Gottfried Wilhelm Leibnitz.

2.2.2. El Mecanicismo cartesiano

El Mecanicismo es una concepción que cree posible explicar la realidad en términos de materia, movimiento local, leyes naturales estrictas y determinismo. Se encuentran ya tesis mecanicistas en la filosofía griega, en el punto de vista de los atomistas.

La ciencia moderna es mecanicista; Galileo introdujo sus ideas básicas desde este punto de vista. Rene Descartes (ver figura 2.6) aceptó el mecanicismo respecto al mundo físico.

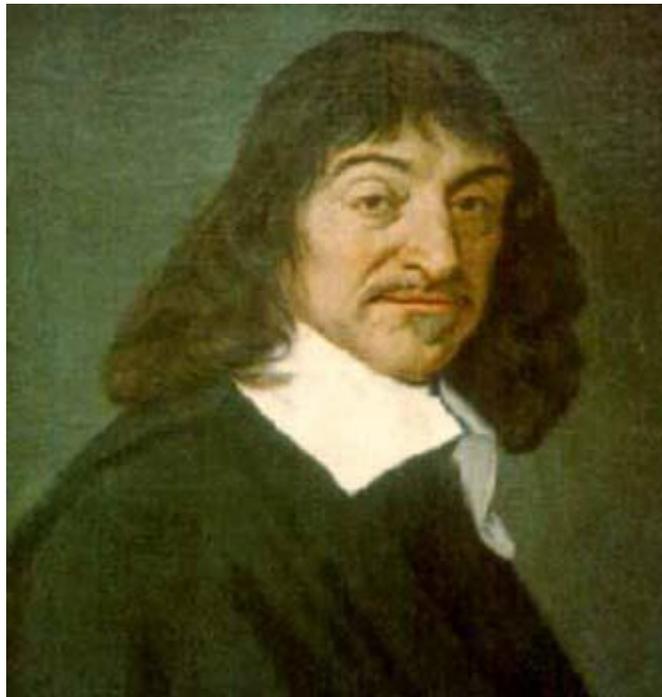


Figura 2.6 Rene Descartes (1596-1650)

Un elemento importante del mecanicismo cartesiano se refiere a su concepción de los animales y las plantas como máquinas. Los animales no tienen mente y pueden ser explicados en términos de materia en movimiento (mecánicamente). Descartes concluyó, tras observar a los ingenieros de su época como habían construido artefactos (máquinas), en las que las partes físicas estaban dispuestas de tal forma que parecían darles conducta final. Pero en estos casos está claro que dicha

conducta no descansa en una mente sino que es responsabilidad de sus componentes físicos. Los animales no tienen mente, aunque parezcan tenerla, como los **autómatas** no tienen mente aunque parezcan tenerla. En el caso de los autómatas el responsable de su conducta aparentemente mentalista y final es el hombre, que los ha fabricado; en el caso de los animales, como Descartes mencionaba, *“el responsable es la propia naturaleza, o en último termino, Dios, que es la causa última del mundo”* [6,7].

2.2.2.1 El mecanicismo cartesiano y los principios de la articulación

Hay que hacer notar, que el mecanicismo cartesiano aporta una idea que los atomistas griegos no consideraron relevante; pero que se considera de suma importancia en el presente estudio: Descartes afirmaba que los entes mecánicos y los organismos vivos, específicamente los animales, están formados por partes que interactúan entre si y que cumplen un propósito o fin específico, mostrando evidentemente una concepción de sistema; esta conducta no es producto de una mente o inteligencia, propia del artefacto u organismo, sino depende de la mente de un ser superior. Hay que hacer notar que la existencia de las nociones de esta última concepción sobre articulación, también pueden advertirse en la corriente filosófica de Leibnitz, denominada Monadología (1714). De todo esto se llega a una posible definición del sexto principio:

El sexto principio: el sujeto como parte del fenómeno de la articulación: **“el proceso de articular debe ser dirigido por un sujeto que trabaja progresivamente con las etapas o niveles de la articulación; esto conduce a una nueva concepción de la articulación, permitiendo visualizarla como un fenómeno, donde sus causas identificables son: la existencia del sistema conceptual (currículo escolar matemático), el sujeto, el tiempo que emplea el sujeto para articular, y el proceso de articular que realiza; el efecto que se produce es que el sujeto adquiera un conocimiento articulado”**.

2.2.3. La Monadología de Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibnitz

Aunque el atomismo y el mecanicismo cartesiano aportaron la mayoría de las ideas propias de la articulación, Leibnitz (ver figura 2.7), aporta elementos extras que permiten caracterizan aspectos sobre el sujeto que articula y las partes que forman el todo articulado, las cuales están reflejados en su tratado llamado Monadología de 1714 (ver Anexo 1). Además, Leibnitz ofrece los elementos necesarios que permiten concebir la articulación mas allá de un sistema que se alcanza por medio de un proceso, ya que permite concebirla como un fenómeno, con causas y efectos perfectamente identificables. Es muy probable que las ideas de articulación que alcanzó, se debieron principalmente al desarrollado conocimiento matemático que

poseía, y como ya se ha mencionado, éste tipo de conocimiento es el preámbulo de un Conocimiento Matemático Articulado.



Figura 2.7 Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibnitz (1646-1716)

La razón que da origen a la Monadología, como una corriente filosófica, el mismo Leibnitz la menciona:

*“...cuando quise buscar las últimas razones del mecanicismo y de las leyes mismas del movimiento, tuve la gran sorpresa de ver que era imposible hallarlas en las matemáticas y que era preciso volver a la **metafísica**.”* (Sanabria, 2001, p. 45).

Solo hay que hacer notar en este momento, que al igual que Leucipo comenzó su visión atomista, Leibnitz empieza su monadología de la misma rama filosófica: la metafísica.

Con respecto al concepto de átomo, Leibnitz sostenía que hablar de partículas indivisibles no tiene sentido, ya que todo lo extenso es divisible *in infinitum*. No siendo la realidad última *res extensa*, ha de ser *res cogitans*, **realidad anímica**. La realidad es metafísica y la extensión y el movimiento no son sino manifestaciones

suyas (fenómenos). El fondo último de la realidad es inespacial, inextenso y, por tanto, simple, indivisible e inmaterial; es energía capaz de autodesarrollar sus potencialidades. La concepción que Leibnitz posee de la sustancia se asemeja a la **"forma sustancial" aristotélica**. Llama "mónadas" a estos infinitos centros de energía: *"Las mónadas o substancias simples son las únicas substancias verdaderas y las cosas materiales no son más que fenómenos, aunque bien fundados y coordinados."*⁴³¹

2.2.3.1. La Monadología y los principios de la articulación

Para Leibnitz, al igual que la visión atomista, el universo es un sistema: un conjunto de mónadas que interrelacionadas entre sí, buscan alcanzar un fin específico, el cual es la conformación de éste mismo. Es de notar la presencia del primer principio de la articulación en esta afirmación. Según Leibnitz, las mónadas son "las sustancias simples de todo en el universo", deslindándose de la idea de átomo de Demócrito, debido que Leibnitz considera que éstos se pueden dividir en infinitas partes; estas últimas son las llamadas mónadas, "las cuales no poseen partes, ni extensión, ni figura, ni divisibilidad". En la línea de las ideas sobre la articulación, esto lleva a suponer que el tercer principio, que habla de los niveles de la articulación es necesario complementarlo con una etapa o nivel anterior al primero, denominado el Nivel 0, el cual haga referencia a los llamados preconceptos; esto lo asienta el séptimo principio:

El séptimo principio: la subdivisión de las partes del sistema: **"en las partes que conforman un sistema, y específicamente, en un sistema conceptual, estos elementos (los conceptos) que lo forman, pueden ser divididos en sus elementos primarios o preconceptos, los cuales son sus signos y símbolos (sus diversas representaciones), a los cuales no pueden hacerse más divisiones, ni se pueden obtener partes de ellos."**

Según la monadología de Leibnitz, las mónadas tienen características propias e identificables. Es decir, cada una de ellas posee un significado específico y distinguible. Esta noción la recoge el octavo principio:

El octavo principio: los componentes de los preconceptos: **"en el Nivel 0 de los preconceptos, los signos y los símbolos poseen significados y representaciones específicas (por ejemplo, representaciones gráficas, numéricas, literales, verbales, etc.)."**

Para Leibnitz, la presencia de un ser creador del universo es indiscutible, debido a la necesaria existencia de una inteligencia superior capaz de articularlo todo. Por lo cual, el noveno principio lo afirma:

El noveno principio: la necesaria existencia del sujeto que articula: **"la existencia del sujeto que articula no puede omitirse, al ser éste el que realiza el proceso de**

articular; por tal motivo, el sujeto es una de las causas identificables del fenómeno de la articulación”.

En el pensamiento de Descartes, el sujeto que articula existe; para Leibnitz, éste no solo existe, sino tiene características mucho más específicas. En su Monadología, las mónadas surgen de Dios, él las crea, las estructura y las destruye. Además, Leibnitz le atribuye a las mónadas características específicas: *“las mónadas creadas o en las entelequias, no son sino imitaciones de Dios, según la perfección que tienen.”*. Continúa Leibnitz diciendo: *“hay en Dios potencia, que es como la fuente de todo; luego conocimiento, que encierra el detalle de las ideas, y, por último, voluntad, que efectúa los cambios o producciones, según el principio de lo mejor.”*. Esto conduce a especificar el décimo principio:

El décimo principio: las cualidades del sujeto que articula: **“el sujeto que articula es el que escoge y define inicialmente los signos y símbolos, que articulados entre si, logran formar los conceptos o ideas, necesarios para evolucionar en el proceso de articular. Dicho sujeto, en el desarrollo del proceso de articular, escoge y define adecuadamente los signos y símbolos a utilizar (puede), conoce el significado de dichos signos y símbolos (sabe) y se encuentra motivado para llevar a cabo el proceso de articular (quiere)”**.

Al igual que para Demócrito, para Leibnitz, la articulación tenía múltiples caminos o posibilidades de estructuración. Es evidente observar que también aquí se encuentra presente la noción del quinto principio de la articulación, que habla sobre los múltiples caminos de la articulación.

Por otro lado, Leibnitz pensaba, que éste ser creador del universo, al manipular las mónadas hallaba: *“en cada una de ellas razones que le obligan a acomodar la otra a la primera”*; de esto trata el décimo primer principio:

El décimo primer principio: la razón de cómo el sujeto articula: **“el sujeto que articula, no solo relaciona las partes a articular por azar o gusto, sino que debe encontrar los vínculos necesarios para realizar esta acción”**.

Leibnitz menciona que el supremo creador, basado en el principio del mejor fin para la estructuración del universo, escogió crear este mundo, por que era el mejor de todos los posibles. El décimo segundo principio extrae esa esencia:

El décimo segundo principio: el mejor fin u objetivo del sistema: **“el sujeto que articula, se enfrenta al llevar a cabo este proceso, que en base a un objetivo preestablecido, debe decidir cuales son las partes implicadas, la manera de interconectarlas y una vez logrado esto, determinar un posible comienzo y la ruta a recorrer por la estructura que presenta el ente articulado, para lograr alcanzar una meta definida, la cual no es otra cosa que el objetivo antes planteado.”**

Por último, para Leibnitz, las interconexiones entre las mónadas muestran un carácter netamente recursivo, debido a que las pequeñas estructuras de las mónadas, reflejan el orden en que se encuentra interrelacionado todo el universo. En términos de sistemas, al referirnos a la recursividad, podríamos decir que los supersistemas (como por ejemplo, el universo), están compuestos por sistemas (galaxias o sistemas de estrellas), y estos a su vez, por subsistemas (sistemas planetarios), que reflejan ciertos grados de similitud entre ellos; de ahí que Leibnitz mencione “...*Todas (las mónadas), confusamente, van al infinito, al todo; pero son limitadas y distinguidas por los grados de las percepciones distintas.*”; por su parte, los sistemas conceptuales, como cualquier otro tipo de sistemas, no se encuentran exentos de esta propiedad. Basado en esto, el décimo tercer principio establece:

El décimo tercer principio: la recursividad de los sistemas: **“La característica recursiva de los sistemas está presente de igual manera en el ente articulado, el cual, como sistema conceptual que es, esta conformado por varios subsistemas del mismo tipo, además de que puede ser parte de sistemas conceptuales más grandes (supersistemas).”**

2.3 El punto de vista de la Educación Matemática sobre la articulación

Para la NCTM, el aspecto de la articulación en matemáticas esta orientado a un interés centrado en el currículo; a este respecto argumenta:

“Aprender matemáticas supone acumular ideas e ir construyendo, sucesivamente, conocimientos más profundos y perfeccionados. El currículo debería proporcionar una guía que ayude al profesorado a conducir a sus alumnos a niveles crecientes de complejidad y profundidad de conocimiento. Tal guía requiere un currículo bien articulado... Su buena articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan en sus estudios” (NCTM, 2000, pp.15,16).

Respecto al aprendizaje de los estudiantes, la NCTM indica que si ellos adquieren una visión de las matemáticas como un todo conectado e integrado, disminuirá la tendencia a considerar por separado conceptos y destrezas; esto refleja por una parte, que el estudiante en éste momento esta adquiriendo conocimiento matemático no articulado, por otra, la necesidad de que el estudiante aprenda en forma articulada tal conocimiento.

Cabe aclarar que la NCTM indica de manera precisa que el currículo escolar debería ser desarrollado de forma articulada, para que el aprendizaje del alumno sea edificado con esa concepción. Podemos vislumbrar una definición elemental de articulación, en el Principio Curricular de la NCTM:

“Los investigadores de la NCTM, encontraron que las lecciones japonesas típicas se diseñaron en torno a una idea central, que era cuidadosamente desarrollada y ampliada y, por el contrario, las americanas incluían varias ideas o temas sin relación estrecha y no bien desarrolladas.... El currículo consta de diferentes bloques temáticos pero todos están notablemente interconectados. Las conexiones deberían destacarse.... En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras... Al planificar las lecciones, los profesores deberían esforzarse en organizar los contenidos para que las ideas fundamentales formen un todo integrado... Secuenciar coherentemente las lecciones a lo largo de las unidades y los niveles de enseñanza, suponen un desafío” (NCTM, 2000, p.15-16).

Se puede observar que el Principio Curricular, aporta diversas ideas para establecer una primera definición de Articulación de Saberes Matemáticos. Según la NCTM, la articulación:

- Se presenta en torno a un saber o conocimiento específico
- Se forma de partes conceptuales que se encuentran evidentemente interconectadas
- Los conceptos involucrados muestran un carácter de tipo recurrente (las ideas se construyen en base a otras).
- Requiere de un esfuerzo intelectual por parte de quien la realiza.
- Es un proceso que no es intuitivo para los sujetos.

Esto permite decir en este punto, que la Articulación de Saberes Matemáticos se puede entender como la acción de escoger o seleccionar de una multitud de posibilidades, la mejor, la más apta o viable manera de estructurar ideas o conocimientos matemáticos específicos que permitan su estandarización; es decir, el articular es el lograr un proceso de selección y vinculación de conceptos de forma óptima. La articulación es un proceso intelectual, producido por un sujeto que tiene clara concepción sobre el como articular. En el proceso de adquisición de conocimiento por parte de los sujetos, éstos llevan a cabo, entre otras cosas, el proceso de articular.

2.3.1 Definición del Fenómeno de Articulación de Saberes Matemáticos

La necesidad de la existencia de la articulación en el currículo escolar, muestra que existe un conjunto de elementos implicados, que se pueden considerar como las causas que dan como efecto o resultado la Articulación de los Saberes Matemáticos. En base a esto, éste tipo de articulación conceptual se puede concebir como un fenómeno, entendiéndose por fenómeno a *“Toda apariencia o manifestación, tanto*

de orden material como del espiritual". En cuanto a los elementos que constituyen los fenómenos, Gorski y Tavants (1970), mencionan al respecto:

"Entre las distintas formas de relación e interdependencia de los fenómenos de la naturaleza y la sociedad, ocupa uno de los lugares más importantes la de la relación causal. Se entiende por relación causal la que existe entre causa y efecto. Consiste dicha relación en el hecho de que todo fenómeno de la naturaleza y la sociedad es provocado necesariamente por algún otro fenómeno o fenómenos.

Se llama causa al fenómeno o conjunto de fenómenos que preceden a otro y le dan origen. Se llama efecto al fenómeno que sigue a otro y es originado por él." (Gorski y Tavants,1970,p:209).

Todos los fenómenos de la naturaleza tienen generalmente una relación causal, la cual se establece entre la causa y el efecto; es decir, para que haya un efecto, siempre existirá una causa que lo determina. El conocimiento de las causas permite explicar científicamente los fenómenos de la realidad, saber cuáles son las leyes que los rigen y que permiten prever cuando van a suceder. El conocimiento de la relación causal permite guiar las condiciones de los fenómenos de acuerdo a las necesidades. Estudiadas las causas se puede evitar o favorecer que se produzcan fenómenos indeseables y provocar otros útiles para el hombre. En este caso, entender las causas identificadas en el presente estudio, sobre el fenómeno de articulación es importante para determinar su relación causa-efecto e intervenir para lograr que se lleve a cabo este fenómeno en los estudiantes.

Esta relación causal tiene carácter de universalidad ya que es propia de todos los fenómenos de la naturaleza y de la sociedad; todos los fenómenos se deben sin excepción, a una causa determinada. Es decir, todos los fenómenos están causalmente condicionados. Un aspecto importante es que la causa siempre precede al efecto y éste siempre sigue a aquella.

La relación causal tiene la propiedad de ser determinada y unívoca, una determinada causa produce un efecto completamente determinado; la determinación y la univocidad de la relación de causa a efecto constituyen una de las leyes más importantes en el mundo. En la naturaleza y en la sociedad las causas y condiciones de muchos fenómenos permanecen constantes o se repiten periódicamente, lo que ayuda a prever cuando o como sucederán tales fenómenos e influir en ellos; tal caso se aplica al Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos.

Determinar la causa de un fenómeno cuando existe una multiplicidad de causas, es más difícil que cuando el fenómeno es originado por una sola; la determinación causal suele complicarse cuando el fenómeno investigativo constituye el resultado de la acción conjunta de dos o más causas. En este caso, las causas son complejas y también complejo es el efecto, cada una de dichas causas dan origen a un efecto y la

suma de estos efectos (mezcla de acciones) proporciona el fenómeno que se estudia (Gorski y Tavants, 1970, p.209).

Las cuatro causas que se han identificado en el Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos, y que se encuentran estrechamente vinculadas, son:

- La existencia de un sistema conceptual (currículo escolar articulado), plasmado en un documento
- La acción de realizar el proceso de articular, el cual se entiende como la secuencia de fases conceptuales por las que el sujeto evoluciona intelectualmente hacia la consolidación de un Conocimiento Matemático Articulado
- El sujeto que realiza el proceso de articular
- El tiempo requerido por el sujeto para que conozca, entienda y realice el proceso de articular. El concepto del tiempo es inherente a la idea del proceso; esto se puede observar desde su definición: *“Conjunto de fases sucesivas que se realizan en el transcurso del tiempo”* (Diccionario Océano Uno, 1992).

El efecto producido por las causas antes mencionadas, dentro del Fenómeno de Articulación de Saberes Matemáticos, se le ha denominado como Conocimiento Matemático Articulado (ver figura 2.8).

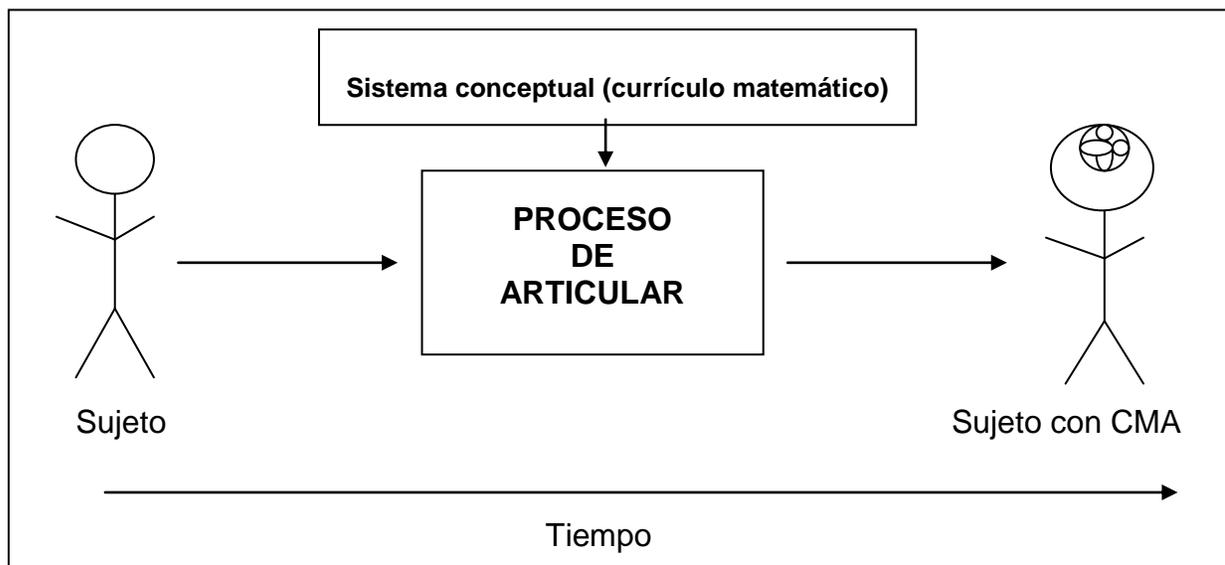


Figura 2.8 El Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos.

Una vez planteados los anteriores elementos, se propone la definición del Fenómeno de Articulación de Saberes Matemáticos: **es el suceso de aprendizaje en donde un sujeto que realiza un proceso de articular, de forma gradual, conoce, entiende y realiza las etapas o niveles de articulación que se presentan en un sistema**

conceptual (currículo matemático articulado), de manera recursiva y en cierto período de tiempo, lo cual provoca en el sujeto que adquiera de forma intelectual, un Conocimiento Matemático Articulado.

Hay que aclarar, que bajo esta perspectiva el currículo escolar es un documento que guía el proceso de articular saberes matemáticos y el sujeto es quien realiza tal proceso de forma intelectual; sin embargo, tener en la mano un currículo articulado de matemáticas no garantiza que el aprendizaje sea articulado, ya que inciden una multitud de factores sobre el estudiante, como por ejemplo los aspectos escolares, administrativos, motivacionales, sociales, culturales, etc.

Finalmente, se puede decir que el Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos es de tipo multicausal, el cual produce un efecto complejo (Conocimiento Matemático Articulado), caracterizándose éste como un fenómeno conceptual complejo; por tal razón, se procederá al análisis, en los posteriores apartados, de cada una de las causas que se han identificado anteriormente.

2.4 Definición del Conocimiento Matemático Articulado

Inicialmente, hay que aclarar que existen diferencias sustanciales entre lo que se entiende por saber, pensamiento y conocimiento. Raúl Gutiérrez Sáenz (2004), menciona a este respecto:

“Podemos concluir, pues, que no es lo mismo pensamiento que conocimiento. El pensamiento es un proceso que lleva al conocimiento. Cada vez que el hombre conoce algo, obtiene en la mente una serie de pensamientos. Por su parte, los verbos conocer y pensar también expresan fenómenos diferentes: conocer es captar algo trascendente a la misma mente. Pensar es barajar esas representaciones ya obtenidas, combinarlas e inclusive inferir otras nuevas. Por tanto, nótese las diferencias entre conocer, pensar y saber. Conocer se refiere a lo trascendente. Pensar es combinar las representaciones inmanentes. Saber es poseer una serie de representaciones” (Gutiérrez Sáenz, 2004, p. 54).

Para aportar una primera aproximación, de lo que se puede mencionar como una caracterización de un conocimiento articulado, Gorski y Tavants (1970) mencionan lo siguiente:

“El intelecto del sabio ejercitado en la investigación se diferencia del intelecto del hombre alejado de la ciencia, entre otras cosas, en que aquél descubre con mucha mayor facilidad y rapidez analogías, puntos de contacto, relaciones e interdependencias allí donde el

entendimiento no experimentado encuentra solamente diferencias, aislamiento y desarticulación” (Gorski y Tavants, 1970, p.54).

En base a lo anterior, se podría decir que algunas de las características de un conocimiento articulado, son:

- Descubrimiento fácil y rápido de analogías (uso del razonamiento por analogía)
- Descubrimiento de relaciones e interdependencias entre los elementos conceptuales trabajados (comprensión del conocimiento como una estructura)
- Capacidad de usar el conocimiento establecido para incorporar nuevo conocimiento a la estructura del saber

En otro orden de ideas, el conocimiento matemático que posee un sujeto que trabaja y aprende matemáticas, presenta las siguientes características generales, como lo dejan entrever Schoenfeld y Santos (1989), en sus definiciones de “poder matemático”, y “hacer matemáticas”, respectivamente:

“La educación matemática debe centrarse en el desarrollo del “poder matemático”, lo que significa el desarrollo de habilidades relacionadas con los siguientes aspectos: la comprensión de conceptos y métodos matemáticos, el descubrimiento de relaciones matemáticas, el razonamiento lógico y la aplicación de conceptos, métodos y relaciones matemáticas para resolver una variedad de problemas no rutinarios” (Schoenfeld, 1989, p.86).

“Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas. En este proceso, el estudiante no solo asimila un conjunto de habilidades matemáticas formales sino también aspectos relacionados con el sentido de las matemáticas. Es decir, aprender matemáticas es un proceso que incluye el encontrar sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir y discutir sus conexiones con otras ideas”. (Santos, 1997, p.3).

Se puede vislumbrar de los autores anteriores y usando el enfoque sistémico, que es posible identificar algunas de las características generales que presentan los individuos que han adquirido un conocimiento matemático articulado:

- Poseen capacidad de comprensión de conceptos y métodos matemáticos, lo que les lleva a inventar, probar y encontrar sentido a las ideas matemáticas,

repercutiendo esto en su entendimiento del sentido de las matemáticas (concepción de las partes o elementos conceptuales)

- Usan el razonamiento lógico, realizan abstracciones y asimilan habilidades matemáticas formales, lo que les permite realizar un proceso de identificar, analizar y relacionar ideas matemáticas (conceptualización del conocimiento, conformado en forma de estructura)
- Aplican el conocimiento matemático adquirido para resolver problemas diversos (conciben que la estructura de conocimientos que poseen, sirve para lograr algún fin o propósito específico)

Basándose en lo anterior, se propone definir al **Conocimiento Matemático Articulado** como el producto de un proceso de pensamiento matemático, fundamentado en el razonamiento lógico matemático (inductivo, deductivo y análogo); éste parte de la identificación de conjuntos de conceptos matemáticos que forman redes o estructuras conceptuales, a las que se les asigna un propósito específico, y que le permiten al sujeto realizar actividades intelectuales complejas de alto nivel de abstracción, como son los procesos de toma de decisiones, de adquisición de conocimiento, y de discernimiento de tipo matemático.

Por último, se menciona la importancia y beneficios que para la NCTM (2000), tiene la adquisición de lo que se podría denominar Conocimiento Matemático Articulado por parte de los individuos, resultado del Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos:

“Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad.” (NCTM, 2000, p.68).

2.5 El plan de estudios de matemáticas como un sistema conceptual

El currículo oficial escolar, curriculum o plan de estudios es un documento que por su propio diseño presenta una naturaleza de carácter articulado, propia de un sistema conceptual, pero debido a múltiples factores que intervienen en su diseño y por la multitud de objetivos que se pretende que persiga, esta articulación no siempre la presenta de manera adecuada y evidente.

Por otro lado, la NCTM, como una de las sociedades más importantes en propuestas curriculares, ha documentado la importancia imprescindible de contar con este documento en el seno de una institución educativa; es la guía de sus procesos educativos y formativos para el alumno. A continuación se tratará de mostrar esta esencia articulada del currículo, independientemente de los enfoques en su diseño y del tipo de conocimiento que aborda, como es el caso del currículo escolar matemático.

2.5.1. Definición del currículo

Para comenzar a plantear lo que se entiende por currículo, se mencionará lo que Grundy (1987) comenta al respecto:

“El currículo, no es un concepto, sino una construcción cultural. Esto es, no se trata de un concepto abstracto que tenga algún tipo de existencia fuera y previamente a la experiencia humana. Más bien es un modo de organización de una serie de prácticas educativas. Siendo una práctica tan compleja, no es extraño encontrarse con perspectivas diversas que seleccionan puntos de vista, aspectos parciales, enfoques alternativos con distinta amplitud que determinan la visión más pedagógica del currículo. Recogeremos una muestra panorámica de significados adjudicados a un campo vasto y poco articulado.” (Gimeno Sacristán, 1996, p.14)

La complejidad del concepto de articular plantea la necesidad de revisar y analizar otras definiciones de diversas fuentes, las cuales permitan analizar con mayor claridad el significado del currículo.

En una primer definición del currículo, éste se entiende como el: *“Conjunto de estudios y practicas destinadas a que el alumno desarrolle plenamente sus posibilidades”* (Océano Uno, 1992). La anterior definición trata de establecer y cubrir de manera general todas las expectativas en cuanto a su estructura. El concepto del currículo marca una amplia gama de posibilidades basada en fines que desembocan en objetivos educativos, sociales, políticos, culturales, laborales, económicos, etc.

Schubert (1986) ha señalado algunas de las diversas “impresiones” globales que produce el concepto del currículo. Son significados acotados por el pensamiento especializado más extendido y en los tratados sobre esta materia. Se trata de acepciones a veces parciales, sesgadas por un determinado planteamiento político, científico, filosófico y cultural:

“El currículo como conjunto de conocimientos o materias a superar por el alumno dentro de un ciclo, de nivel educativo o modalidad de enseñanza es la acepción más clásica y extendida. El currículo como programa de actividades planificadas, debidamente secuenciales,

ordenadas metodológicamente. El currículum como experiencia recreada en los alumnos a través de la que pueden desarrollarse; el currículum como tareas y destrezas a ser dominadas, caso de la formación profesional y laboral; el currículum como programa que proporciona contenidos y valores para que los alumnos mejoren la sociedad en orden a la reconstrucción social de la misma.” (Gimeno Sacristán,1996,p.14,15).

Para Schubert, como para muchos otros autores, el currículum es un conjunto de materias, programas, actividades planificadas metodológicamente y un conjunto de valores que el alumno debe aprender y superar para mejorar socialmente. Esta es la noción más clásica de currículum, además de que plantea otras diversas dimensiones del currículum, como el ser un constructo de conocimientos en si mismo y como una herramienta con fines educativos, de formación laboral, profesional y social.

Para Hilda Taba (1991), una de las autoras más citadas en la bibliografía del desarrollo curricular, el currículum en una institución educativa se entiende como:

“Es el elemento central que guía los procesos de enseñanza-aprendizaje de la misma, es quien dirige el trabajo que ha de realizarse en el aula, sin importar su estructura o enfoque, debe cumplir la misión de que en su estructura se encuentren plasmados los elementos del conocimiento, elementos que el estudiante finalmente debe aprender. El interés principal se centra en un currículum escolar enfocado al conocimiento.” (Taba,1991,p.265).

Hay que hacer notar que para Taba, así como para Schubert, los principales elementos del que esta constituido el currículum es el conocimiento y las actividades que se desarrollan con éste. Esto conduce a dilucidar un hecho bastante importante sobre el currículum, ya que éste es un concepto que se encuentra formado por elementos de carácter teórico (conocimientos plasmados en un documento) y práctico (actividades que realizan y aptitudes que adquieren los estudiantes). Estos elementos se entremezclan para formar el complejo concepto del currículum, como lo señala Hilda Taba (1962):

“El currículum debe comprender lo siguiente: una declaración de finalidades y objetivos específicos, una selección y organización del contenido, ciertas normas de enseñanza y aprendizaje, y un programa de evaluación de los resultados” (Taba,1962, p.10).

Apoyando esta última definición del currículum, Philip Phenix (1968), proporciona una descripción de los tres componentes elementales del curriculum:

“1) Qué se estudia: el contenido o materia de instrucción

“2) *Cómo se realizan el estudio y la enseñanza; el método de enseñanza*

“3) *Cuándo se presentan los diversos temas: el orden de instrucción*”
(Phenix, 1968, p.9)

Para los autores antes mencionados, es claro observar que convergen en varios puntos; uno de ellos y que nos es de sumo interés, es el elemento presente del conocimiento.

2.5.2. Tipos de currículums

Como ya se ha mostrado, el concepto del currículo es algo tan vasto y complejo de entender, que para tratar de aclarar dicho panorama, hablemos de las tres dimensiones de las que se compone el currículum.

En el Third International Mathematics and Science Study, realizado en 1997, por el TIMS International Study Center, perteneciente al Boston College, de Boston, U. S. A.; se clasificó al currículo desde tres enfoques diferentes: a) la intención institucional; b) la práctica magisterial y c) el aprovechamiento de los alumnos, a los que se les denominó como el currículum oficial, el currículum implantado y el currículum logrado, respectivamente; estos se describen a continuación:

- *Currículo oficial.* Es el que aparece en los planes y programas de estudio de las distintas instituciones, donde se presentan los contenidos a estudiar, guías para su ejecución y las referencias bibliográficas correspondientes.
- *Currículo implantado.* Es el que los profesores llevan a la práctica en el salón de clases. El profesor no necesariamente sigue al pie de la letra los contenidos del currículum oficial, ya que sus conocimientos y concepción de la matemática y de su enseñanza influirán notablemente tanto en el tratamiento de los diversos temas como en la selección de las actividades de aprendizaje para sus alumnos.
- *Currículo logrado.* Lo definimos como aquello que los estudiantes logran aprender. Los últimos estudios internacionales sobre aprovechamiento matemático revelan que hay diferencias notables entre lo que realmente logra aprender la mayoría de los estudiantes y aquello que, de acuerdo a los programas y la visión del profesor, se intenta enseñárseles. (Gorostiza, 1998, p.84-86).

Entre los tres enfoques de currículo existe una relación intrínseca; sin embargo, para conocer el grado en que éstos se llevan a cabo, los autores indican que:

“Para determinar las características del currículo oficial, es necesario analizar los planes y programas de estudio, así como las guías y referencias bibliográficas recomendadas para su ejecución. Para estudiar el currículum implantado, se requiere observar el trabajo del maestro en el salón de clases. Finalmente, para saber cuál es el currículo logrado, se necesita de la observación del desempeño de los estudiantes frente a tareas diversas.” (Gorostiza,1998, p.87).

En el presente estudio, se presta atención exclusivamente a la concepción del currículo oficial, debido a una razón elemental: el currículo oficial se encuentra conformado, entre otras cosas, por los planes y programas de estudios. Se ha mencionado con anterioridad que es de sumo interés para el presente trabajo analizar el aspecto del conocimiento en el currículo escolar, estando el mencionado conocimiento plasmado en un documento, el cual es relevante debido a que contiene aspectos sobre la articulación; en conclusión, el documento en donde se encuentra plasmado el conocimiento existente en el currículo escolar, se le denomina específicamente plan de estudios.

El concepto del plan de estudios, dentro del presente trabajo, posee las características básicas de un sistema conceptual o abstracto (se recordará que un sistema conceptual es aquel conjunto de elementos conceptuales que interrelacionados entre si, buscan lograr un objetivo o fin específico); así lo dejan entrever Raquel Glazman y Maria de Ibarrola (1978), investigadoras del CISE-UNAM, cuando se refieren a la forma en como se encuentra estructurado el currículo escolar:

“El plan de estudios constará, entre otras cosas, de la especificación ordenada de las asignaturas que se habrán de estudiar, seleccionadas de manera metódica para alcanzar propósitos específicos y coherentes de aprendizaje.” (Glazman e Ibarrola,1978, p.363).

Las diversas asignaturas del plan de estudios se consideran los elementos conceptuales que se encuentran en forma ordenada, seleccionadas de manera metódica, lo cual refleja interconexiones entre ellas, evidenciando la existencia de una estructura, y ésta estructura, busca alcanzar propósitos específicos. En definitiva, es evidente observar la existencia de la noción sistémica en el concepto del plan de estudios. Se puede concluir de lo anterior, que el plan de estudios representa esencialmente, para el presente estudio, el sistema de los conocimientos teóricos que se enseñan en la escuela, analizándolo como un ente de conocimiento.

2.5.3 La organización y estructuración del plan de estudios

El plan de estudios o currículo escolar es un documento que toma forma en base a distintos intereses, como lo indican algunos autores del currículo. Es un documento que está o debería estar en constante evolución y retroalimentación entre la institución y las necesidades de la sociedad; independientemente de su diseño, el

currículo escolar presenta una tendencia de estructura articulada, debido a que también en este punto, se le considera como un sistema conceptual.

Para abordar las diversas formas en como se estructura el currículo escolar, se comenzará a mencionar la forma en como se acomodan los elementos conceptuales que lo conforman. Según el Diccionario de Pedagogía (1970) *“el plan de estudios es la ordenación general por años y cursos de las materias y actividades que han de desarrollarse en la escuela”*. (Editorial Labor, España,1970). Según Robert Gagné (1978), el currículo es:

“una secuencia de unidades de contenido ordenadas de tal forma que el aprendizaje de cada una de ellas puede realizarse como un solo acto, siempre y cuando las capacidades descritas por unidades específicas anteriores (en secuencia) hayan sido aprendidas por el estudiante.” (Glazman e Ibarrola,1978, p.27).

Estas definiciones destacan primordialmente la ordenación secuencial de las asignaturas que conforman su contenido, la cual deberá elaborarse en forma que las unidades posteriores incluyan a las anteriores. Por otro lado, Glazman e Ibarrola (1978), mencionan:

“El diseño del plan de estudios plantea muchos problemas que no se han resuelto satisfactoriamente. A pesar de ser la definición mas común en nuestro medio, limita el plan de estudios a la organización del contenido por materias y a la ordenación de estas por años, ambos principios superados en la actualidad. Existen desde hace tiempo serias dudas en cuanto a la organización del contenido por materias como la forma optima y se han introducido tales como áreas y, mas recientemente módulos”. (Glazman e Ibarrola,1978,p.27).

El pensamiento didáctico moderno afirma que existen dos posibilidades diferentes de ordenar el material, discutidas y ensayadas desde hace mucho: a) la forma de enseñanza dividida en materias o asignaturas acostumbrada y practicada de antaño en la escuela primaria; y b) la llamada enseñanza globalizada o integrada, que parte directamente de los fenómenos y totalidades vitales que coloca en el centro de la enseñanza (Díaz Barriga,1999, p.18).

a) Organización del plan de estudios por asignaturas

Cuando las instituciones educativas se enfrentan a la necesidad de construir planes de estudio, resulta más fácil para ellas recurrir a una estructuración por asignaturas llevadas por la fuerza de la tradición, y no por un análisis de las implicaciones pedagógicas que de ella se derivan. Esta situación contrasta notablemente con las fundamentaciones que se deben efectuar para que se acepte un plan de estudios que obedezca a una estructuración distinta, como por ejemplo, por áreas o módulos.

La estructura de los planes de estudio o currículo escolar por asignaturas, refleja un aspecto llamado la atomización del conocimiento, el cual concibe que el desarrollo de la ciencia evoluciona a partir de la segmentación de un objeto de conocimiento, de su formalización y del estudio de sus principios y leyes, a pesar de que la naturaleza de la ciencia misma es la de un ente articulado, con conocimientos sistematizados. Esta situación dificulta que el estudiante tenga una visión integral del conjunto de problemas que se presentan en un objeto de estudio particular, restringido y aislado de sus propios conceptos, lo que no permite al estudiante el hacer razonamiento y articulación sobre los conceptos de estudio. Al respecto, Díaz Barriga (1999) indica que:

“un efecto de esta atomización del contenido, es la falta de “ejes estructurantes” y “núcleos de problemas”, que permitan articular, vertebrar y dar sentido a la información. Ésta permanece fragmentada a lo largo del currículo y el maestro se convierte en “especialista de su materia”, no buscando otra relación con otras del mismo plan. La institución educativa contrata al docente sólo por las horas de clase que le corresponden a cada materia. Al alumno le compete la tarea de construir, organizar, e integrar una información segmentada. Es como armar un rompecabezas con piezas que no responden a un solo modelo; por ello, habitualmente el estudiante no alcanza a integrar dicha información.” (Díaz Barriga, 1999, p.50)

Es claro ver, que el currículo escolar organizado por materias o asignaturas, por un lado trata de dividir en partes todo el conocimiento, para después buscar su integración; y aunque se tiende a una articulación de estas partes, el acto de segmentar dicho conocimiento, parece producir el efecto contrario. Otro aspecto relevante es que al no haber integración ni articulación del currículo escolar, esto le impide al estudiante comprender e interpretar las relaciones entre los temas, es decir, articular los saberes que aprende.

b) Organización del plan de estudios en forma globalizada

Esta forma de estructurar el currículo escolar como una concepción curricular modular por objetos de transformación, ha llevado a considerar importante discutir su valor en una organización que busca un mayor nivel de integración de los contenidos. En esta situación surgen las propuestas globalizadoras. Las alternativas basadas en la globalización implican la revisión de la noción de ciencia. En esta acción postulan la unidad entre ciencia y realidad; de esta manera se considera que la división del conocimiento en diferentes materias de estudio es arbitraria y obliga al alumno a estudiar sin encontrar los nexos y las relaciones que entre sí guardan.

Así, para K. Stöcker (1964) hay dos formas de ordenar los temas didácticos: *“por materias, que logran presentar zonas bien ordenadas de información, que incluso se pueden programar en porciones para diferentes años, y la globalizada, como*

totalidad de materias formativas, donde el conocimiento surge de la cosa percibida como unidad” (Stöcker, 1964, p.202,208). La globalización es una búsqueda para restituir tal unidad, dado que el desarrollo de la ciencia fragmentó la explicación de lo real. A este respecto, Angel Diaz Barriga (1999) menciona:

“la organización interna de un currículo escolar ya sea por asignaturas o de carácter globalizador plantea una serie de problemas críticos. Aparentemente el debate se inicia con el planteamiento curricular modular por objetos de transformación, el cual realiza un serio cuestionamiento a la organización curricular por asignaturas y propone un modelo centrado en los objetos de transformación, como base de la conformación curricular a la que denominan modular.” (Díaz Barriga,1999, p.47).

Díaz Barriga (1999) indica que en la actualidad se denomina “tradicional” a la estructuración curricular por asignaturas y “moderna” a la modular. Los módulos están integrados por “unidades que conforman asignaturas”. Un módulo representa una unidad instruccional abocada al análisis y solución de un problema dado.

c) Organización del plan de estudios por objetivos de aprendizaje

Según Glazman e Ibarrola (1978), al igual que cualquier actividad humana, la actividad educativa siempre ha respondido a determinados objetivos. Estos han sido más o menos conscientes, más o menos precisos y se han planteado con relación a diversos aspectos de la educación; se ha definido su función en la sociedad o se han precisado las actividades o los medios a través de los cuales se prevé alcanzar ciertos resultados. Independientemente de la forma en que se estructure el currículo escolar, por asignaturas, áreas o módulos, este debe regirse por objetivos de aprendizaje; Hilda Taba (1991) plantea los siguientes principios para orientar la formulación de un currículo escolar:

- *“Los objetivos complejos deben ser determinados tan analítica y específicamente como para que no quede duda sobre el tipo de conducta esperada o a lo que se aplica.*
- *Los objetos deben formularse también de modo que establezcan diferencias claras entre las experiencias del aprendizaje apropiadas para lograr conductas diferentes.*
- *Los objetivos son evolutivos y representan caminos por recorrer antes que puntos terminales.*
- *Los objetivos deben ser reales e incluir sólo aquello que puede ser trasladado al currículo y a la experiencia del aula.*

- *El alcance de los objetivos debe ser lo suficientemente amplio como para comprender todos los tipos de resultados de los cuales la escuela es responsable.*” (Taba, 1991, p.265)

Para que los objetivos desempeñen adecuadamente sus funciones, se necesita una aproximación sistemática a su formulación y organización. Debe existir una base racional para la concepción de los resultados deseados del aprendizaje y para la agrupación y clasificación de los objetivos. Sin la definición explícita de estos objetivos, es muy improbable que se logre la plena articulación del currículo escolar; así lo afirman Glazman e Ibarrola (1978):

“El introducir al plan de estudios el objetivo de aprendizaje es que éste es un factor sumamente flexible, anterior a cualquier forma de agrupación, ordenación y jerarquización de los estudios, que permite y facilita diferentes configuraciones de planes de estudios”. (Glazman e Ibarrola, 1978, p.28).

Es por ello, que los currículos escolares actuales, presentan una estructura basada en estos objetivos de aprendizaje, independientemente de su organización por materias o módulos; pero esto conduce a algo mucho más relevante: la forma de articular un plan de estudios no solo consta de poner los temas necesarios para el estudio, sino que estos objetivos de aprendizaje son necesarios para dirigir el rumbo de los conocimientos que se están adquiriendo; así lo menciona Glazman e Ibarrola (1978), al definir el plan de estudios por objetivos de aprendizaje:

*“Plan de estudios es el conjunto de objetivos de aprendizaje, **operacionalizados** convenientemente, agrupado en unidades funcionales y estructurados de tal manera que conduzcan a los estudiantes a alcanzar un nivel universitario de dominio de una profesión, que normen eficientemente las actividades de enseñanza y de aprendizaje que se realizan bajo la dirección de las instituciones educativas responsables y permitan la evaluación de todo el proceso de enseñanza.”* (Glazman e Ibarrola, 1978, p.28).

Para Glazman e Ibarrola (1978), la necesidad de esta concepción surge frente a la concepción tradicional de un plan de estudios formulado como un conjunto de contenidos sin mayor relación. El modelo propuesto busca que el plan de estudios comprenda una serie de contenidos y comportamientos que se integran en torno a los objetivos generales y a un conjunto de cursos que se disponen en una progresión lógico-pedagógica.

Los objetivos de aprendizaje pueden responder a distintos niveles de generalidad, los cuales están en función de la complejidad de los contenidos sobre los que éstos recaen. El plan de estudios implica la definición de objetivos a distintos niveles de especificación. Se puede señalar de antemano la existencia de tres niveles necesarios para el diseño que se propone: general, intermedio y específico. Entre los

distintos niveles de especificación se establece una relación **dialéctica**; el nivel general determina la formulación de los niveles específicos, pero a su vez el cumplimiento del objetivo general sólo se alcanza como consecuencia del cumplimiento de aquéllos.

Se considera que la institución indistintamente del enfoque en se que planteé la estructuración, desarrollo y organización del currículo escolar debe cuidar que exista un orden, coherencia y articulación de sus elementos conceptuales; es decir, el plan de estudios por ser un cuerpo de conocimientos, busca de forma instintiva por su naturaleza misma, la articulación de los saberes que contiene.

La anterior exposición de argumentaciones permite fundamentar que, independientemente de la estructura y organización que posea el currículo escolar se le puede caracterizar como un sistema conceptual, debido a que cumple, en forma general, con los tres aspectos elementales de los sistemas:

- a) Está compuesto de elementos o partes de conocimiento (materias, asignaturas, áreas o módulos).
- b) Los vínculos o relaciones conceptuales entre esos conocimientos particulares, forman la estructura total del conocimiento que se pretende abordar.
- c) Existen objetivos de aprendizaje generales y particulares que dictan el curso y propósito de la evolución intelectual, en la adquisición de las partes presentes del conocimiento en el plan de estudios.

Es evidente notar que la concepción sistémica se encuentra presente en este último punto, enfoque que presenta el primer principio de la articulación.

2.5.4 La desarticulación del currículo escolar

Los conceptos de articulación y desarticulación son inversos entre sí. La desarticulación se define como el acto de desorganizar, separar o desunir un ente articulado en las partes que lo forman.

Se ha definido al plan de estudios o currículo escolar como un sistema conceptual o abstracto, que se encuentra formado de conceptos, temas o bloques temáticos, los cuales se encuentran interrelacionados por vínculos intelectuales, y los cuales, conformando una estructura, buscan alcanzar objetivos específicos. Si los sistemas se conciben como lo enunciaba Aristóteles: *“el todo es algo más que la suma de las partes”* (Huerta Ibarra, 2003, pp.22), el “todo” puede ser fragmentado o mejor dicho, desarticulado en las “partes” que lo constituyen; de este hecho habla el cuarto principio de la articulación.

2.5.5 El proceso de desarticular el currículo

En un proceso de articulación de saberes, es necesario llevar a cabo en algún momento, el acto de desarticular el currículo escolar en las partes que lo conforman; esto se realiza no con el afán de destruir el plan de estudios, sino con la intención de analizar o investigar cuáles son los conceptos involucrados en los saberes articulados. Por lo regular, es necesario construir con fines didácticos, instrumentos documentales desarticulados que le sirvan de guía en el proceso de articular, al sujeto que pretende adquirir un conocimiento articulado.

La desarticulación del plan de estudios requiere de un esfuerzo relativamente sencillo, en comparación con el esfuerzo necesario para lograr articular las partes que conforman al plan de estudios.

El proceso de desarticular al currículo escolar consiste, básicamente, en los siguientes pasos:

- a) El sujeto que articula, no considera u omite los objetivos que persiguen el currículo, así como los vínculos intelectuales existentes entre los conceptos, temas o bloques temáticos tratados.
- b) Las partes, que por lo regular son conceptos, pueden ser a su vez fragmentados en sus constituyentes más elementales, por parte del sujeto que articula; esto se realiza con el propósito de llegar a la comprensión de las ideas que les dieron origen.

Con respecto a este último punto, hay que hacer referencia que se vinculan con el séptimo y octavo principio de la articulación.

Para realizar el fraccionamiento de las partes, desde el punto de vista de la Lógica formal, se recomienda que en la división de los conceptos se atiendan las siguientes reglas:

- La división debe ser completa. Es decir, debe mencionarse un conjunto de partes que equivalga al todo dividido. Esto es un hecho indispensable en la división.
- Las partes deben excluirse entre sí. Esto significa que una parte no debe abarcar a otra.
- La división debe ser ordenada y gradual. Se recomienda que la enumeración de las partes siga un cierto criterio lógico, por ejemplo: de mayor a menor importancia.
- La división debe ser breve. Esta cualidad es indispensable si lo que se pretende es facilitar la claridad y la penetración. De lo contrario se produce una mayor confusión y oscuridad (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 115, 116).

2.5.6 La estructura del currículo escolar matemático

En los puntos anteriores se trató el aspecto general del currículo, así como sus distintas acepciones y enfoques. Ahora se centrará el interés particularmente en el currículo escolar matemático, el cual responde a la misma definición que la del plan de estudios general, solo que el conocimiento del que trata específicamente, es el conocimiento matemático que se aborda en el ambiente escolar. El interés de centrar la atención en el currículo escolar matemático como un sistema conceptual, es por la importancia que tiene para el presente trabajo.

La NCTM, como uno de los organismos más importantes en Educación Matemática de los Estados Unidos de Norte América, aporta elementos de cómo debiera estructurarse un currículo escolar matemático articulado; establece claramente cuales son, por un lado, los beneficios de contar con un currículo con estas características, y, por otro, cuales son los riesgos de no contar con este documento. El plan de estudios matemático es un elemento nuclear que guía los propósitos de la institución en varios sentidos generales: en la actividad docente del profesor, en la actividad intelectual del estudiante y en el logro de las metas planteadas por la propia institución educativa. La NCTM (2000), en su Principio Curricular establece que: *“Un currículo es algo más que una colección de actividades: tiene que ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y bien articulado a través de los diferentes niveles.”* (NCTM, 2000, p.15).

Es evidente hacer notar que una característica que aparece constante tanto en el currículo general como en el currículo escolar matemático, es su natural y recomendable tendencia a la articulación. No obstante, escribir un currículo escolar matemático debe contener ciertas características propias, las cuáles permitan diseñar una estructura curricular que funcione de la mejor manera posible, particularmente en la Educación Matemática. Sin embargo, estructurar un currículo con estas características es complejo; no se trata de aglomerar ciertos conceptos, contenidos o temas matemáticos de cierto grado y nivel, de enseñarlos y aprenderlos, es una labor que requiere de un proceso cuidadoso en el ensamble de las piezas que lo van a formar por un lado, y por otro, de ver el enfoque que éste debiera tener. Es decir, no se trata de plasmar en un documento las experiencias acumuladas de cómo enseñar o aprender matemáticas, sino de realizar un trabajo metódico en el que participen las distintas áreas internas (y de ser posible externas) de la escuela para su formulación, desarrollo, integración y articulación de un modo ordenado y coherente. Realizar un currículo escolar matemático exige que su ensamble se realice por el área docente, el área de investigación, la administración educativa, padres de familia e incluso por los propios estudiantes que son en primera instancia, a quienes se aplica este importante documento, denominado el currículo escolar. Es por ello, que el plan de estudio de matemáticas no escapa a la concepción sistémica del currículo escolar en general, planteada anteriormente. Por tanto, es momento de especificar los tres elementos que debe contener el currículo escolar matemático:

a) *Las partes del conocimiento escolar matemático*

Se ha mencionado que las asignaturas o módulos son los elementos que conforman el plan de estudios en forma general. En el currículo escolar matemático esta idea no es ajena. Tal vez el problema más fuerte aquí es el determinar que temas, bloques temáticos, secciones de conocimiento, asignaturas o módulos de la disciplina matemática se deben abordar en el plan de estudios, así como la profundidad con la que se deben tratar cada uno de los subtemas que los componen. Tradicionalmente se abordan, según el nivel educativo de que se trate, temas de la matemática básica: aritmética, álgebra, geometría y trigonometría; el estudio del precálculo como lo es la geometría analítica y el estudio de funciones e inclusive temas de la matemática superior, como lo es el cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales el álgebra lineal, los métodos numéricos, entre otros.

b) La estructura del conocimiento escolar matemático

El conocimiento matemático es la base del plan de estudios de matemáticas. Debido a su propia naturaleza, las matemáticas presentan una estructura conceptual definida, en donde existen relaciones y reglas entre las partes conceptuales; Richard Courant y Herbert Robbins (1971) así lo documentan:

*“A través de los tiempos, los matemáticos consideraron sus objetos, tales como números, puntos, etc., como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que estos entes desafiaban siempre los intentos para una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron paulatinamente a la conclusión de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía, en modo alguno, sentido dentro de las matemáticas. Las únicas proposiciones relativas a ellos que pueden importar no se refieren a su realidad sustancial; representan únicamente las relaciones mutuas entre “objetos indefinidos” y las reglas que rigen las operaciones con ellos. Lo que “realmente” son los puntos, las rectas y los números ni se puede ni es necesario discutirlo en la ciencia matemática. Lo que interesa y lo que corresponde a hechos comprobables es su estructura y relación: que dos puntos determinan una recta, que los números se combinan según ciertas reglas para formar otros números, etc. La percepción clara de la necesidad de una **desustanciación** de los conceptos elementales matemáticos ha sido uno de los resultados más importantes y fecundos del **desarrollo axiomático** moderno.”*
(Courant y Robbins, 1971, p.14-16).

No es la intención de ver al conocimiento matemático como una mera estructura estática, la cual se compone de axiomas, teoremas o demostraciones; éstas partes son importantes, sin embargo se requiere tener un propósito del trabajo que se desarrolla en matemáticas, de tal forma que tome importancia en los aspectos principales de su desarrollo. Con respecto a esto, R. Courant y H. Robbins (1971) mencionan:

“Parece existir un grave peligro en el excesivo predominio del carácter axiomático deductivo de las matemáticas. Una amenaza seria para la verdadera vida de la ciencia aparece contenida en la afirmación de que la matemática no es más que un sistema de conclusiones derivadas de definiciones y postulados que deben ser compatibles, pero que, por lo demás, pueden ser creación de la libre voluntad del matemático. Si esta descripción fuera exacta, las matemáticas no podrían interesar a ninguna persona inteligente. Sería un juego con definiciones, reglas y silogismos, sin meta ni motivo alguno.” (Courant y Robbins, 1971, p.14-16).

Lo anterior documenta dos aspectos principales: el primero, es el riesgo de considerar a las matemáticas como una mera estructura de conocimientos estables. No es de interés tratar a las matemáticas bajo este enfoque, sino como una serie de subsistemas que interactúan entre sí de forma dinámica, formando una estructura; segundo, el motivo de plantear a las matemáticas como un sistema es por considerar que tiene una estructuración jerárquica, ordenada y coherente, teniendo un fin específico que alcanzar, de modo que éste es el motor que promueve su estudio.

c) Los objetivos que persigue el currículo escolar matemático.

El propósito que debería perseguir el currículo escolar matemático, es el de plantear el conocimiento matemático escolar como uno de los ejes centrales de la educación. Lara Aparicio (1973), en una propuesta de programas de matemáticas presentada por la ANUIES, plantea los siguientes objetivos generales de la Enseñanza Matemática:

- Conocer los principales métodos y ramas de las matemáticas
- Comprender el papel que juegan los métodos matemáticos dentro del método científico, de su aplicación y sus limitaciones
- Desarrollar una actitud creativa y crítica frente a los métodos matemáticos, que implica:
 - ✓ Una actitud de búsqueda activa de las posibilidades de emplear legítimamente los métodos matemáticos como parte del análisis científico de una situación
 - ✓ Una actitud de crítica permanente a los resultados propios y ajenos que permita detectar el empleo ilegítimo de los métodos matemáticos
- Desarrollar la capacidad para aplicar creativamente los métodos matemáticos utilizando las técnicas conocidas o desarrollando técnicas nuevas
- Desarrollar la capacidad para criticar el empleo ilegítimo de los métodos matemáticos y proponer métodos alternativos (matemáticos y no matemáticos)

- Desarrollar la capacidad para proseguir el estudio de las matemáticas más allá del contexto escolar, con el fin de profundizar más en los objetivos generales o de alcanzar objetivos específicos
- Desarrollar la capacidad para comunicar los conocimientos, actitudes y capacidades matemáticas
- Desarrollar una actitud de confianza en la capacidad propia (Lara Aparicio et al., 1973, p.23,24)

Estos objetivos plantean la forma de guiar el proceso de diseño y estructuración de un currículo escolar matemático. Se considera que la orientación de su construcción debe estar enfocada al conocimiento matemático específicamente.

2.6 Definición del sistema conceptual

Después de analizar la visión de la NCTM sobre el significado de la articulación conceptual, se puede expresar ésta en forma general, como el **conjunto de elementos conceptuales interconectados que forman un todo integrado en torno a un saber o conocimiento central**. Esta definición conduce a pensar que una forma de establecer el concepto de articulación conceptual es a través del concepto general de sistema. Se comenzará por definir el concepto de sistema, como lo cita Jhon P. Van Gigch (1993):

“Un sistema es una reunión o conjunto de elementos relacionados con un fin común. Los elementos de un sistema pueden ser conceptos, en cuyo caso estamos tratando un sistema conceptual.”
(Van Gigch, 1993, p.17).

Existen evidentes similitudes entre el concepto de articulación conceptual de la NCTM y el de sistema; con el fin de poder establecer un razonamiento con cierta validez lógica, se recurre al tipo de razonamiento por analogía. Según Carlos Ibarra Barrón (1998), el razonamiento por analogía es aquel en que, de la observación de los caracteres comunes que poseen dos hechos, se pasa a la afirmación de otro carácter común que ha sido observado sólo en uno de ellos. En este tipo de razonamiento, la conclusión se mantiene en el mismo grado de particularidad o generalidad que tienen sus premisas y se observa claramente la progresividad del conocimiento, ya que se pasa de lo conocido a lo desconocido. Las conclusiones obtenidas como el de toda analogía, es solamente probable, no forzosa, hecho que no le quita valor científico, ya que sirve para orientar la investigación.

El razonamiento por analogía se funda, como los otros razonamientos, en un principio: en lo real hay analogía. El razonamiento por analogía aspira a descubrir esa analogía de lo real. Es éste un razonamiento muy común, constantemente se aplica en la vida diaria cuando se comparan hechos y objetivos de las más variadas

especies. En esto reside su valor científico: amplía la experiencia y hace surgir nuevas ideas (Ibarra Barrón, 1998, pp. 212, 213).

Utilizando el razonamiento sustentado en la analogía, se hace evidente la similitud entre la definición de articulación de la NCTM y la de sistema de la **Teoría General de Sistemas**; esto permite la factibilidad de poder utilizar ésta última como un marco teórico; así lo deja entrever Oscar J. Bertoglio (1986):

*“La teoría de sistemas (o el enfoque de sistemas) toma una posición contraria (como metodología) al **enfoque reduccionista**. mientras éste último tiende a la subdivisión cada vez mayor del todo, y al estudio particular de estas subdivisiones, el **enfoque de sistemas** pretende integrar las partes para alcanzar una totalidad lógica o de una independencia o autonomía relativa con respecto a la totalidad mayor de la cual también forma parte”* (Bertoglio, 1986, p.21).

Hay que hacer notar, que el enfoque de sistemas concuerda con una de las más importantes características de la articulación, que es la de integrar las partes que forman el todo; de ahí la factibilidad de realizar ciertas analogías entre ambos campos de estudio. Continuando con este orden de ideas, los sistemas se caracterizan por presentar sinergia y recursividad. Al respecto, Bertoglio, señala:

“Se entiende como Sinergia, a la suma de las partes que es diferente del todo; cuando un objeto cumple con este principio o requisito decimos que posee o existe sinergia. Según el filósofo Fuller: un objeto posee sinergia cuando el examen de una o alguna de sus partes (incluso a cada una de sus partes) en forma aislada, no puede explicar o predecir la conducta del todo” (Bertoglio, 1986, pp:35,36).

“Podemos entender por recursividad el hecho de que un objeto sinérgico, un sistema, este compuesto de partes con características tales que son a su vez objetos sinérgicos (sistemas). Hablamos entonces de sistemas y subsistemas. O, si queremos ser más extensos de supersistemas, sistemas y subsistemas. Lo importante del caso, y que es lo esencial de la recursividad, es que cada uno de estos objetos, no importando su tamaño, tienen propiedades que lo convierten en una totalidad, es decir, en un elemento independiente” (Bertoglio, 1986, p.44).

La NCTM (2000) menciona que la articulación no solo se refiere al mero aglomeramiento de los bloques temáticos del currículo de un nivel educativo, sino que dentro de estos se debe buscar las conexiones posibles, debido a los beneficios que aporta. Es decir, en términos de sistemas, el currículo de un nivel, debe ser un objeto sinérgico. Si lo anterior es posible en el currículo de un nivel educativo, esto

mismo se puede llevar a cabo en cada uno de los currículos de toda la enseñanza de matemáticas, logrando construir un **sistema curricular** con sinergia y recursividad, debido a que está formado por currículos que poseen, a su vez, características sinérgicas y recursivas.

En cuanto a las conexiones que existen dentro del currículo, la NCTM (2000) establece el concepto de conexión, de la forma siguiente:

“Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles. Como se subraya en el Principio de aprendizaje, comprender implica hacer conexiones.” (NCTM, 2000, p.68).

Además, derivado del concepto de conexión, la NCTM desarrolló el Estándar de conexiones, el cual menciona:

“Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- a) Reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas.*
- b) Comprender como las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente.*
- c) Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos”* (NCTM, 2000, p.68).

Las conexiones existentes en el currículo, que son de tipo conceptual, representan las interrelaciones entre las partes conceptuales o bloques temáticos. La importancia de este hecho lo podemos ver desde el punto de vista de los sistemas, ya que estos vínculos se identifican como información (como lo concibe la **cibernética**), y que le permite al sistema, alcanzar un estado de caos o desorganización (entropía), o un estado de organización u orden (neguentropía o entropía negativa); de esto depende que se logre o no, el fin preestablecido del sistema. Se entiende por entropía y neguentropía lo siguiente:

“Se ha definido a la entropía como la tendencia que tienen todos los sistemas a alcanzar su estado más probable. Este estado más probable es el caos, la desorganización, la eliminación de las diferencias que lo hacen identificable.” (Bertoglio, 2000, p.123).

“Hemos señalado anteriormente que la entropía tiende a desordenar el sistema lo que, a nuestro juicio, es real. Sin embargo, el sistema a través de la neguentropía puede combatir y superar esa tendencia.

La información, como tal, puede considerarse como una disminución de la incertidumbre o del caos, y en este sentido, la información tiende a combatir la entropía; la información es pues, neguentropía.”
(Bertoglio, 2000, pp.104,126)

La articulación del currículo, visualizado como un sistema conceptual, busca aumentar el grado de información que lo organiza y disminuya a su vez, el caos presente en él. Tanto la información como el caos, fueron principios que Norbert Wiener, padre de la cibernética, estudio ampliamente. Para Wiener, la entropía y la información (neguentropía) se consideran en el mundo en correlación con el caos y el orden; la entropía es la medida del caos, la cantidad de información es la medida del ordenamiento (Pékelis, 1977, p.136). Hay que hacer notar que desde el enfoque de sistemas, la entropía tiende a aumentar gradualmente, y la neguentropía a disminuir en forma natural; esto origina que el sistema tienda al caos total. Para que esto no suceda, se debe procurar constantemente que el nivel de neguentropía sea mayor al de entropía dentro del sistema: “...*la información se encuentra en dependencia recíproca de la entropía.*” (Pékelis, 1977, p.136).

Finalmente, se puede argumentar que las conexiones que se buscan en un currículo, deben llevarlo a un nivel de organización, que le permita alcanzar los fines que éste persigue.

Basándose en los elementos anteriormente presentados, se propone una definición de sistema conceptual: **Sistema conceptual matemático es aquel ente que esta formado por dos o más conceptos matemáticos, entre los cuáles se realiza una operación de relación, conexión o vinculación (información que organiza), que dá lugar a una estructura ordenada, coherente, de mayor complejidad y jerarquía que las partes que la integran; con el propósito de alcanzar los objetivos de carácter intelectual planteados previamente (específicamente, los objetivos propios del currículo escolar matemático).**

Usando el principio de recursividad de los sistemas, se ejemplifica la esencia del sistema conceptual (currículo escolar matemático), por medio del ejemplo de uno de sus muchos subsistemas conceptuales, que en este caso es específicamente la demostración del siguiente teorema algebraico (Apóstol, 1978, pp.22,23). Inicialmente se considera que las partes del sistema son la hipótesis del teorema, los axiomas implicados y la conclusión de éste. La interrelación se forma en base a los vínculos conceptuales factibles entre los componentes, a lo que se denomina estructura. Para alcanzar el estado de sistema, debe considerarse la existencia de un elemento donde se inicie y otro donde termine dicha acción: la hipótesis del teorema se concibe como el inicio, y la conclusión como el fin o propósito que se busca alcanzar el sistema. El camino que se recorre a través de la estructura, y que parte del inicio para llegar al final, plantea la necesidad de emplear un razonamiento matemático:

- Axioma 1. Propiedad asociativa.
Para cualesquiera tres números reales x, y, z se tiene $x+(y+z)=(x+y)+z$
- Axioma 2. Existencia de neutro aditivo.
Existe un número real que se indica por 0 , tal que para cada número real x se tiene: $0+x=x+0=x$
- Axioma 3. Existencia de negativos.
Para cada número real x existe un número real y tal que: $x+y=y+x=0$

TEOREMA: “Si $a+b = a+c$, entonces $b = c$ ”

Demostración:

Dado $a+b = a+c$, en virtud de (A3), existe y tal que:

$$y+a = 0$$

Sumando en ambos miembros y , se tiene:

$$y + (a+b) = y + (a+c)$$

Aplicando la propiedad asociativa (A1):

$$(y+a) + b = (y+a) + c$$

y se sabe que $y+a = 0$. Entonces:

$$0 + b = 0 + c \quad (a)$$

Pero en virtud de (A2), se tiene:

$$0 + b = b$$

$$0 + c = c$$

Sustituyendo en (a), se concluye que:

$$b = c$$

Una representación grafica de lo antes mencionado, se podría visualizar como un dígrafo, con un inicio y un fin (ver figura 2.9).

En definitiva, la definición de sistema conceptual centra su interés en el diseño y estructura conceptual que debiera contener el currículo escolar matemático; es decir, al aspecto externo que presenta, y que se plasma en un documento.

2.7 El sujeto que articula y su adquisición del Conocimiento Matemático Articulado

El sexto principio de la articulación menciona que otro de los elementos presentes en el Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos, es el sujeto que realiza la articulación.

Se propone definir al sujeto que realiza el proceso de articular, llamado también el sujeto cognoscente, **como la persona que conoce; es el que capta algo, el que se posesiona con su mente de las características de un ser; sus facultades cognoscitivas (ojos, oídos, entendimiento, etc.) posibilitan que se dé cuenta de lo que pasa alrededor de él, y el cual ésta dispuesto a adquirir un Conocimiento Matemático Articulado** (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 51-53).

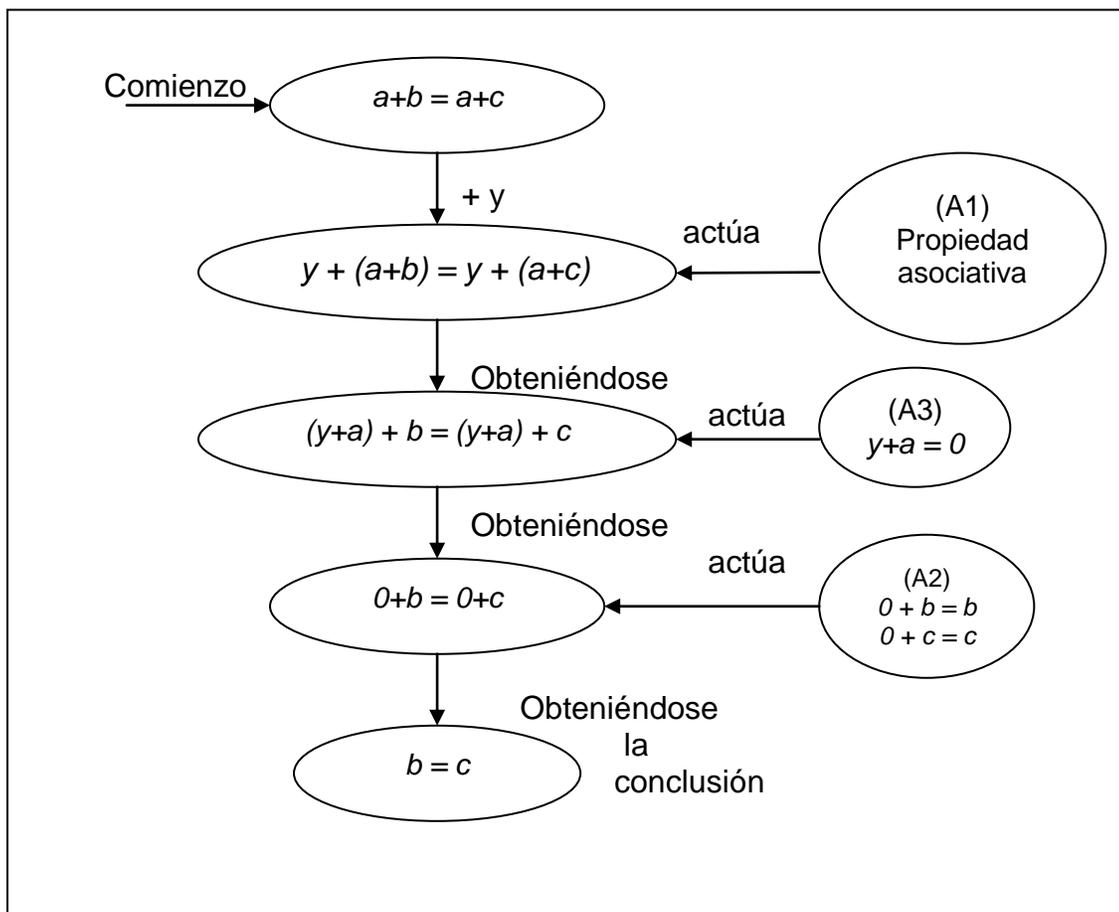


Figura 2.9. Ejemplo de subsistema conceptual matemático.

Por otra parte, el noveno principio de la articulación aclara que el sujeto que articula, es uno de los elementos necesarios dentro de dicho fenómeno. Hay que aclarar, que el estudio del sujeto y de sus operaciones cognoscitivas son propias de la Psicología, (ya que su interés se centra en cómo se conoce, cómo se razona y cómo se piensa) (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 53,54); en el presente estudio, solo se abordarán los aspectos relevantes sobre el pensamiento de las personas.

Se ha mencionado anteriormente que el sujeto que articula, después de haber realizado un proceso de articular, logra adquirir un conocimiento articulado, aclarando que cuando este tipo de conocimiento es de tipo matemático, se le denomina Conocimiento Matemático Articulado.

Para abordar algunos aspectos de la adquisición del conocimiento, se recurre al campo de la Lógica formal, debido a que es la ciencia de los pensamientos en cuanto a sus formas mentales, para facilitar el raciocinio correcto y verdadero. Los problemas típicos que estudia son las diferentes clases de pensamiento, las características de un conocimiento científico, los métodos apropiados en cada ciencia, las causas del error, las condiciones de un raciocinio riguroso, entre otros. La utilidad y la importancia de la Lógica quedan claras desde el momento en que esta ciencia ayuda a la mente a pensar con corrección, claridad, orden, profundidad e ilación (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 16,22).

Teniendo a la Lógica como marco de referencia, se entiende por adquisición de conocimiento a: *“la operación por la cuál, un sujeto obtiene representaciones internas de un objeto”* (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 53). Para comprender el contexto a que se refiere la anterior afirmación, Gutiérrez Sáenz (2004) plantea que se pueden distinguir cuatro elementos que constituyen el fenómeno de la adquisición del conocimiento: el mencionado sujeto, el objeto, la operación y la representación. A continuación se detallan éstos:

- *El objeto:* es la cosa o persona conocida. Siempre el sujeto conoce un objeto. El acto de conocer uno de estos dos elementos, el sujeto y el objeto, de tal manera que la cosa conocida no se llamaría objeto si no fuera porque es conocida. Y del mismo modo, la persona que conoce, se llama sujeto por el hecho de conocer un objeto. Es decir, sujeto y objeto son dos términos correlativos; uno supone al otro; en esta correlación cognoscitiva, el sujeto se modifica durante el acto del conocimiento. En cambio, el objeto queda tal cual.
- *La representación:* en las facultades cognoscitivas del sujeto se producen ciertas representaciones; se llaman así porque de algún modo tratan de reproducir (referirse o representar) en la mente del sujeto lo que pasa en el exterior. La representación interna es, pues, un contenido **intramental** que se refiere a un objeto. El objeto, la mayor parte de las veces es **extramental**, o sea, fuera de la mente.
- *La operación:* Es el acto de conocer. Es el proceso psicológico necesario para ponerse en contacto con el objeto y lograr obtener una representación fiel de

dicho objeto. Nótese que no es lo mismo el acto de ver (o el acto de oír, o el de pensar; todos ellos, operaciones cognoscitivas) que la representación obtenida en el interior del sujeto cognoscente, una vez realizados dichos actos. La operación cognoscitiva dura un momento, es casi instantánea. En cambio la representación obtenida, perdura en el interior del sujeto, en su memoria, de la cuál se puede extraer en el momento que se quiera con un nuevo esfuerzo mental. (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 51-53).

Según el punto de vista de la Lógica, estos cuatro elementos interactúan entre sí, para producir el fenómeno de la adquisición del conocimiento; así lo explicita Gutiérrez Sáenz (2004):

*“A pesar de que este tema es propio de la Psicología, es conveniente explicar aquí (aunque sea someramente) el procedimiento mental que da lugar a las ideas. El sujeto **cognoscente**, después de captar un objeto por medio de las facultades sensibles, penetra con la inteligencia hasta un plano más profundo del mismo objeto y descubre allí un contenido **inteligible**, una estructura necesaria, un sentido del objeto. Coincide esto con lo que generalmente se llama entender. Llegar hasta el significado (más o menos profundo) o a la estructura esencial y necesaria de un objeto que primero se ha presentado a los sentidos, es realizar esta operación mental llamada simple aprehensión. La simple aprehensión consiste en el paso de la imagen a la idea. No quedarse en la contemplación de la imagen sensible, sino tratar de descubrir algo en el fondo de ella; eso es aprehender o abstraer”* (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 65).

La simple aprehensión es la operación mental por la cual un sujeto capta un elemento necesario del objeto, es decir, una idea. Y, por último, de un modo abreviado, también se puede decir que la primera operación mental es el paso de la imagen a la idea; ésta no es una operación sencilla; es decir, o se capta algo o no se capta. Y la captación suele ser de golpe, a veces irrumpiendo estruendosamente. Es lo que se expresa cuando se dice de pronto: “tengo una idea”. La simple aprehensión es pues, lo mismo que concebir una idea (o conceptuar). De la palabra concebir surge el término de concepto. El producto de esta concepción es la idea o concepto. No es una operación sencilla; en muchas ocasiones consiste en entender algo difícil. También se llama intuición, queriendo indicar que el hombre capta, en un objeto, su significado profundo, que está allí latente, pero oculto a los sentidos. (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 67,68)

En este punto, se tiene evidencia para proponer que en la adquisición del Conocimiento Matemático Articulado, por parte del sujeto que articula, estos elementos y el proceso mental implícito se hacen presentes de manera análoga: el sujeto cognoscente que va a llevar a cabo la articulación, realiza un proceso de articular con instrumentos de tipo documental que presentan características de un

sistema conceptual (objeto), compuestos de elementos conceptuales pertenecientes a un currículo matemático escolar; después, a través del análisis, comprensión y realización que lleva a cabo dicho sujeto en el proceso de articular (generación de representaciones internas y desarrollo del proceso mental), éste alcanza interrelacionar entre si los elementos conceptuales y comprende la esencia del ente conceptual articulado, o lo que es lo mismo, adquiere un Conocimiento Matemático Articulado.

Además de lo ya antes mencionado, el décimo primer principio de la articulación menciona que todo el esfuerzo que realiza el sujeto que articula, debe poseer secuencia en todas las relaciones de tipo intelectual que aparecen en el desarrollo del proceso de articular, que de forma metafórica se podría asemejar esto a la manera en como se acomodan las fichas de domino en fila y que al mover la primera, esta hace caer a la que sigue, y esta a la siguiente y así, sucesivamente, conocido esto como el efecto Dominó (ver figura 2.10); ésta característica convierte al acto de articular en una poderosa herramienta intelectual para adquirir y entender conocimiento de tipo matemático.

2.8 El papel del tiempo dentro del fenómeno de la articulación

Se ha mencionado que el sujeto que articula realiza un proceso de tipo conceptual sobre un documento que presenta características de un sistema conceptual (por lo regular es un tema o partes del currículo escolar matemático); al final de este proceso, y si todo fue adecuadamente conducido, el sujeto logra adquirir un Conocimiento Matemático Articulado; todo esto se lleva a cabo en un lapso determinado, debido a que la adquisición intelectual esta sujeta a los procesos psicológicos de la memoria humana, como lo asienta claramente uno de los paradigmas principales de la **Psicología Cognitiva**:



Figura 2.10 El efecto dominó

“Uno de los postulados centrales de la Psicología Cognitiva afirma que el procesamiento cognitivo de la información (específicamente los procesos de la memoria humana) requiere de un tiempo real, el cual se ve afectado por el tipo de operación cognitiva involucrado en dicho procesamiento” (Lachman, Lachman y Butterfield, 1979).

En definitiva, el proceso de articular como ya se ha mencionado, es llevado a cabo por un sujeto el cual necesita de un período de tiempo para llevarlo a cabo. En términos de la **Didáctica**, el tiempo necesario para la adquisición de conocimiento se le denomina tiempo didáctico, llamado así por Chevallard (1998):

“El proceso didáctico existe como la interacción de un texto del saber y una duración, a ésta se le denomina tiempo didáctico, el cual es la programabilidad de la adquisición del saber. El tiempo didáctico se compone del tiempo de enseñanza y el tiempo de aprendizaje, respectivamente” (Chevallard, 1998, pp:75).

Este tiempo didáctico, y en especial el tiempo de aprendizaje, comprende formalmente en el ambiente escolar, algunos años; pero no solamente es necesario para el proceso de aprendizaje, y en especial, del aprendizaje de las matemáticas, el factor del tiempo para lograr adquirir un Conocimiento Matemático Articulado, ya que se necesitan algunos otros elementos, como los que menciona Hanna y Yackel, dentro del Principio del Aprendizaje de la NCTM (2000):

“La comprensión de ideas matemáticas puede alcanzarse, a lo largo de los años de escolarización, si se les compromete activamente en tareas y experiencias diseñadas para profundizar y relacionar sus conocimientos. Y puede mejorarse mediante interacciones en el aula, cuando los estudiantes proponen ideas y conjeturas matemáticas, aprenden a evaluar su propio pensamiento y el de los demás, y desarrollan destrezas de razonamiento (NCTM, 2000, p:22).

Esto conduce el suponer que el sujeto que articula debe poseer algunas cualidades básicas necesarias (décimo principio de la articulación): el sujeto cognoscente, para que lleve a cabo el proceso de articular, debe presentar tres características fundamentales: 1) debe estar motivado a realizar el acto de articular; 2) debe saber que partes o elementos conceptuales necesita, así como el vincularlas, además de como lograr que la estructura intelectual que ha definido, cumpla con el objetivo previamente establecido al comienzo del acto de articular; y 3) debe tener la capacidad intelectual de poder realizar la actividades del mismo tipo necesarias para definir las partes implicadas, establecer los vínculos intelectuales entre ellas y poder cumplir el objetivo especificado.

Finalmente, se puede decir, en base a lo antes expuesto, que los sujetos, dentro del Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos se pueden encontrar en: a) un estado de “no articulación” que se puede definir como el estado en que está el sujeto antes de realizar el proceso de articular; y b) un estado de articulación, que se concibe cuando el sujeto ha realizado dicho proceso. El lograr que un sujeto pase de un “estado de no articulación” a un “estado de articulación”, se encuentra en función de los saberes implicados y del tiempo específico que requieren cada uno de los sujetos que se encuentran expuestos a este método, debido a las diferencias cognitivas propias de cada uno, como ya se ha mencionado anteriormente.

2.9 El proceso de articular

En forma general, un proceso se concibe como **el conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno**. El segundo principio de la articulación, define a ésta como el proceso de articular. Como ya se ha mencionado, dicho proceso de articular esta íntimamente ligado con otras causas identificables del fenómeno de la articulación: el sujeto que interactúa con el sistema conceptual, realiza con éste, una actividad intelectual durante este proceso y el tiempo, que este sujeto requiere para llevar a cabo dicho proceso. El proceso de articular es la causa del Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos que permite lograr el efecto esperado en los individuos que se espera adquieran un Conocimiento Matemático Articulado.

Se ha mencionado que el acto de articular se concibe como un proceso. Una disciplina que aporta una concepción relevante sobre éste aspecto es la **Termodinámica**, ya que puede aportar elementos relevantes para la definición del concepto del proceso de articular.

2.9.1. Definición del proceso de articular

Según el enfoque Termodinámico, un proceso es *“La trayectoria de la sucesión de estados por los que pasa un sistema se llama proceso”* (Sonntag y Van Wilen, 1991, pp:41). Una definición más robusta la ofrece Wark (1986), al abordar la idea de estados, que también pueden ser entendidos como etapas o niveles, entre los cuales se transiciona de una forma específica:

“Un proceso es cualquier transformación de un sistema de uno a otro estado de equilibrio. La descripción completa de un proceso suele incluir la especificación de los estados inicial y final de equilibrio, la trayectoria (si es distinguible) y las interacciones que tienen lugar a través de las fronteras durante el proceso. La trayectoria en termodinámica se refiere a la especificación de una serie de estados por los cuales pasa el sistema.” (Wark, 1986, pp.10)

De las anteriores definiciones, se pueden extraer tres consideraciones importantes para definir el proceso de articular:

- Se llama proceso a la sucesión de estados por los que pasa un sistema
- Existe un estado inicial y un final (hay partes que distinguen unas de otras)
- Se presenta una trayectoria definida, basada en una sucesión de pasos por los cuales pasa el sistema (en el cual esta contenido una estructura)

Es de notarse la evidente relación del concepto de sistema y proceso, ya que éste último especifica los pasos que se siguen para que se de la evolución de los sistemas: 1) se seleccionan un conjunto de partes o elementos; b) se busca interrelacionar los elementos, para que formen una estructura; finalmente, c) se define un elemento como el inicio y otro como el final, que permita trazar una trayectoria o ruta, para ser recorrida sobre la estructura existente del sistema.

En el contexto del Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos, el proceso de articular se lleva a cabo con la adquisición y comprensión, por parte del sujeto que realiza el proceso de articular, de cada una de las partes o elementos conceptuales que se encuentran plasmados en el sistema conceptual (currículo matemático articulado).

Este proceso presente en los sistemas, y específicamente en los sistemas conceptuales, conduce a la concepción de niveles de articulación, debido a que se ha concebido que el proceso de articulación suele ser tan extenso y complejo, debido, entre otras causas, a la multitud de factores implicados en el currículo escolar matemático; por tal razón, se ha considerado prudente segmentarlo por etapas o niveles. De tal forma, se propone definir proceso de articular como **el paso gradual de un nivel de articulación a otro, permitiendo alcanzar un Conocimiento Matemático Articulado al sujeto cognoscente que lo lleva a cabo** (ver figura 2.11). La existencia de los niveles de la articulación se nota reflejada en el tercer principio de articulación.

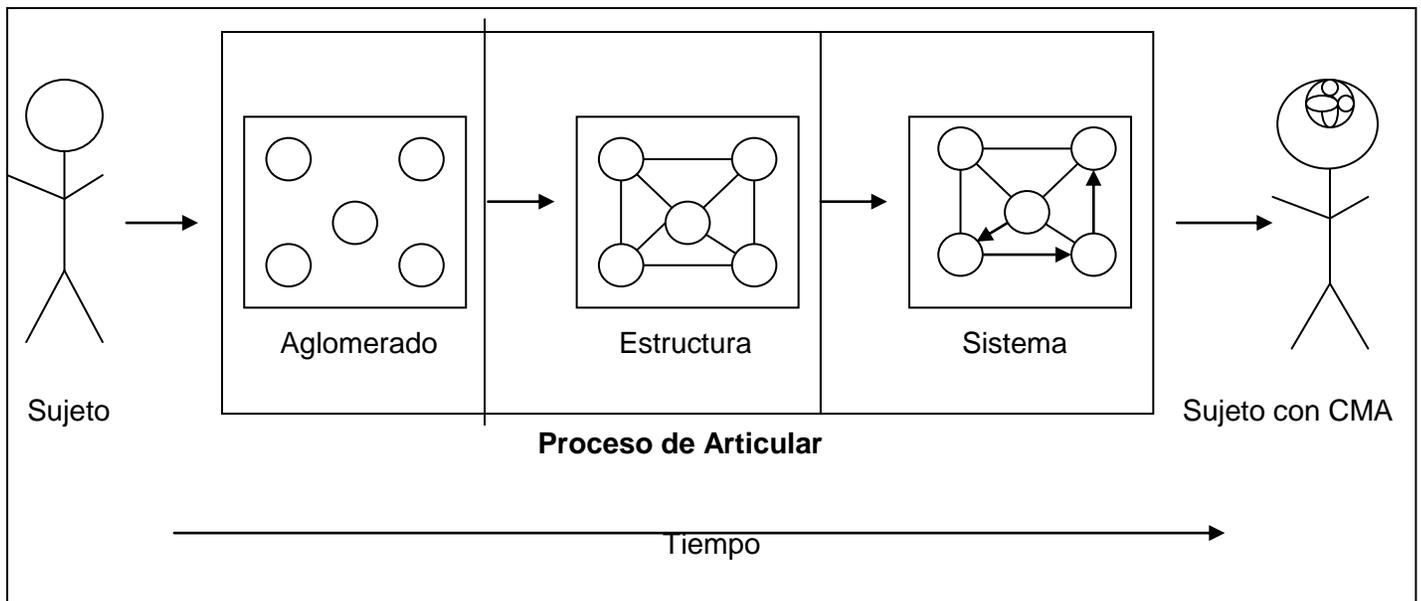


Figura 2.11 Los niveles del proceso de articular

Estos niveles se les ha llamado aglomerado, estructura y sistema conceptual, (niveles 1, 2, 3, respectivamente). En el Nivel 1, el aglomerado conceptual, se compone, como su nombre lo dice de conceptos. Cuando estos conceptos comienzan y mantienen vínculos entre ellos, se pasa al Nivel 2, el de la estructura conceptual. Cuando en esta estructura se define a un concepto como un punto de inicio, y a otro u otros, como fin o propósitos a alcanzar, y se recorre la ruta o camino que se forma del que se marca como inicio, a los marcados como finales posibles, se dice que se ha alcanzado el Nivel 3, el del sistema conceptual. Hay que aclarar que estas mencionadas rutas o caminos, no son necesariamente únicos; pueden existir varios de ellos: se puede partir de un inicio y recorrer varias rutas alternativas, para llegar al mismo término o fin; el quinto principio de la articulación habla sobre este hecho.

Es importante recordar, que los sistemas poseen la característica de la recursividad, la cual permite concebir que los sistemas estén estructurados por sistemas más elementales (subsistemas). En este sentido, las partes o elementos (conceptos) a los que se refiere el citado Nivel 1, pueden ser fragmentados en elementos más simples, llamados signos y símbolos o preconceptos (de éstos se hablará con mayor detalle más adelante); el séptimo y octavo principio tocan este punto en particular.

2.9.2 La definición de la jerarquía de los niveles del proceso de articular

De manera inicial, el proceso de articular, se encuentra plasmado en lo que se ha denominado como Jerarquía de Niveles de Articulación. Cabe aclarar, que la NCTM (2000) y algunos otros grupos de investigación en Educación Matemática mencionan el concepto de articulación; sin embargo, no se cuenta con una especificación precisa sobre el cómo articular conceptos y saberes matemáticos, como tampoco existe algún método para propiciar en los estudiantes el desarrollo del Conocimiento

Matemático Articulado. La presente propuesta de jerarquía de niveles, pretende el permitir elaborar instrumentos documentales que permitan al docente guiar la construcción de instrumentos articulados para la enseñanza del estudiante, permitiéndole lograr a éste último, el aprender articuladamente.

Se cree que el proceso de articular busca lograr la interconexión de conceptos matemáticos diversos, con el fin de que le permita al estudiante, lograr adquirir un Conocimiento Matemático Articulado, el cual consiste en un conjunto sistematizado de conocimientos, en forma análoga a como lo hace un matemático profesional y, en donde el proceso de articular ideas forme parte de su pensamiento cotidiano.

Como ya se ha mencionado, el acto de articular es un proceso que llega a definirse y perfeccionarse con el tiempo, debido a que las estructuras cognitivas de las personas tardan en alcanzar la necesaria lucidez o madurez intelectual sobre las ideas adquiridas; éste último aspecto, como ya se ha mencionado, varía en los individuos y en las acciones cognitivas realizadas por éstos (Lachman, Lachman y Butterfield, 1979; Chevallard, 1998; NCTM, 2000).

El proceso dinámico de la articulación se presenta por etapas o estadios, de los cuales se propone una jerarquía de cuatro niveles, con el fin de categorizar en forma más específica y de manera más adecuada, el proceso de articular. La jerarquía de los cuatro niveles del proceso de articular son:

Nivel 0: Los preconceptos

Nivel 1: El conglomerado conceptual

Nivel 2: La estructura conceptual

Nivel 3: El sistema conceptual

El contexto de cómo surgió esta jerarquía de niveles, de como se encuentran constituidos y de la forma en como se evoluciona de uno a otro, ha sido la contribución de las ideas de diversas disciplinas, entre las que se pueden mencionar la teoría general de sistemas, algunos elementos conceptuales de la teoría axiomática de sistemas, utilizada con fines de definición; la teoría de la información, la teoría de conjuntos, la teoría de funciones discretas, la teoría de grafos, la lingüística estructural, la lógica y la teoría de la computación entre las más relevantes, y las cuales aportaron muchas de las concepciones presentadas. A continuación, se mencionan algunos aspectos pertenecientes a estos campos de estudio, como argumentos introductorios a la definición de los niveles de la articulación:

a) La utilidad del razonamiento por analogía

El desarrollo de las ideas sobre la jerarquía de los niveles del proceso de articular, están basadas fundamentalmente en razonamientos por analogía, ya que el proceso de articular se basa, entre otras ideas, en una analogía con el modelo lingüístico llamado, la doble articulación (en cual se describirá más adelante). Este tipo de razonamiento se convirtió en la herramienta intelectual indispensable en el desarrollo de los niveles de articulación, base del proceso de articular.

b) El papel de la teoría general de sistemas

La Teoría General de Sistemas es uno de los principales campos disciplinarios implicados en el desarrollo de la jerarquía de los niveles de la articulación: el concepto de sistema y sus características, como la sinergia, recursividad, información, entropía, entre otros, han sido la semilla que dio origen a la conceptualización de la articulación como se presenta en el presente estudio. También se ha encontrado que en estudios como el de la *organización lógica del contenido u organización lógica de las experiencias de aprendizaje*, de Morgannov y Heredia (1976) (que se presenta en el capítulo del estado del arte), poseen un enfoque sistémico.

La idea inicial que permitió identificar la importancia de tomar en cuenta a los sistemas, es por que la teoría de los sistemas, posee una idea análoga a la articulación: no solo se busca analizar las partes, sino entender como éstas se vinculan para formar el todo.

Entre las nociones que la teoría de los sistemas aporta, específicamente al proceso de articular, podemos citar las siguientes:

- En los sistemas en general, se observan diversas características; por analogía los sistemas conceptuales o abstractos presentan muchas de ellas.
- Los sistemas conceptuales, como los demás sistemas, pasan por procesos de evolución o desarrollo.
- Todos los sistemas poseen un fin u objetivo a alcanzar, lo que lleva a suponer que si hay un fin, debe haber un punto de inicio. Los procesos de evolución de los sistemas requieren de estos mismos elementos.
- La formación de los sistemas pasan por etapas claramente diferenciables: de ser un conjunto de elementos (aglomerado), pasan a interrelacionarse de alguna forma (estructuras) y teniendo un objetivo específico a alcanzar, se convierte en un ente muy diferente a las partes que lo conforman (sistema); de ahí la noción de los niveles de articulación.
- Los conceptos de aglomerado y estructura, son etapas previas, consecutivas y necesarias para llegar al concepto de sistema.

- En la formación de los sistemas, la información que organiza a las partes implicadas, es la neguentropía o entropía positiva.
- Una vez que se conforma un sistema conceptual, la estructura que posee le posibilita tener diferentes cursos de acción, los cuales pueden tener diversos inicios, siguiendo diferentes rutas o caminos, pero llegando a un mismo objetivo (ver figura 2.12).

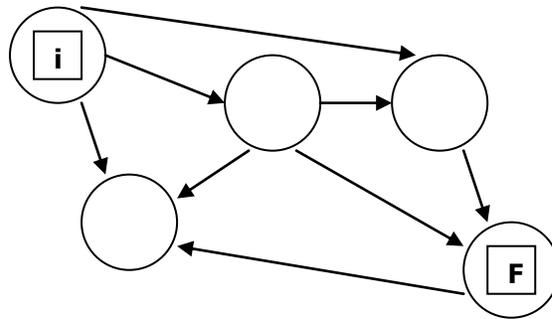


Figura 2.12 Los múltiples caminos en los sistemas conceptuales

c) La influencia de algunas corrientes filosóficas sobre la idea de los niveles del proceso de articular

La conceptualización del fenómeno de la articulación no es una idea reciente. Específicamente, se puede decir que se han localizado tres conceptualizaciones filosóficas sobre la constitución del universo, en donde se pueden observar interesantes rasgos de la idea de articulación:

- La teoría atomista de Demócrito de Abdera (472-370 a.C.).
- El mecanicismo de Rene Descartes (1596-1650)
- La Monadología de Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716)

Del análisis de cada una de estas corrientes filosóficas, ha surgido la definición de los trece principios de la articulación, anteriormente mencionados.

d) Ejemplo de un ente articulado: el lenguaje humano

Al querer especificar como se estructura el proceso de articular, del cual se conoce muy poco, el camino más factible a tomar es hacer una analogía de éste, con un fenómeno que contenga procesos que sean evidentemente articulados. Uno de los entes articulados más comúnmente conocidos es el del lenguaje humano. Se define, desde el punto de vista de la actual lingüística estructural, al lenguaje humano, como: “es un sistema de signos distintos que corresponde a ideas distintas” (Mounin, 1974, p.29). Como lo menciona Georges Mounin (1974), el término mismo del lenguaje articulado es muy antiguo, pero es una expresión que ha sido intuitiva y ambigua

durante mucho tiempo (Mounin, 1974, p.47). A este respecto, Saussure (1916), el padre de la lingüística estructural, había señalado:

“Que en latín articulus significa: miembro, parte, subdivisión en una sucesión de cosas y que en cuestión de lenguaje, la articulación puede designar o bien la subdivisión de la cadena hablada en sílabas, o bien la subdivisión de la cadena de las significaciones en unidades significativas” (Mounin, 1974, p.48).

Si para la lingüística actual, el lenguaje humano se le puede considerar un ente con características de articulación, sería prudente averiguar como se presenta ésta. Para ello, se aborda el llamado modelo de la doble articulación del lenguaje humano. Para la lingüística estructural, las frases del lenguaje humano se componen de monemas o palabras (primera articulación), las cuales a su vez están compuestas por unidades más pequeñas: los fonemas (segunda articulación), las cuales tienen forma fónica, pero no significado (silabas). Estos fonemas a su vez, están formados por símbolos más elementales (las letras). Esto nos deja entrever la estructura del lenguaje articulado (ver figura 2.13).

Las diversas letras, bajo ciertas reglas, forman las diferentes silabas, que presentadas en ciertos arreglos específicos, forman palabras y estas a su vez, dispuestas de manera adecuada, forman las oraciones (Mounin, 1974, p. 48-51).

e) Las aportaciones de la Lógica formal

Al definir como el proceso de articular evoluciona de un nivel a otro, se ha encontrado que presenta una evidente analogía con la Lógica, debido a cómo se estructuran los pensamientos. Según la lógica, el pensamiento es una representación interna intelectual y que, además, es universal y se obtiene por medio del entendimiento. Por esto se distingue esencialmente de las representaciones sensibles o imágenes, las cuales son captadas por medio de los sentidos, las cuales se dan en forma singular (se refieren a un solo objeto) y son reproducidas por la imaginación (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 61).

De acuerdo a la Lógica formal, se distinguen tres tipos de pensamientos, que son la idea, el juicio y el raciocinio (Gutiérrez Sáenz, 2004):

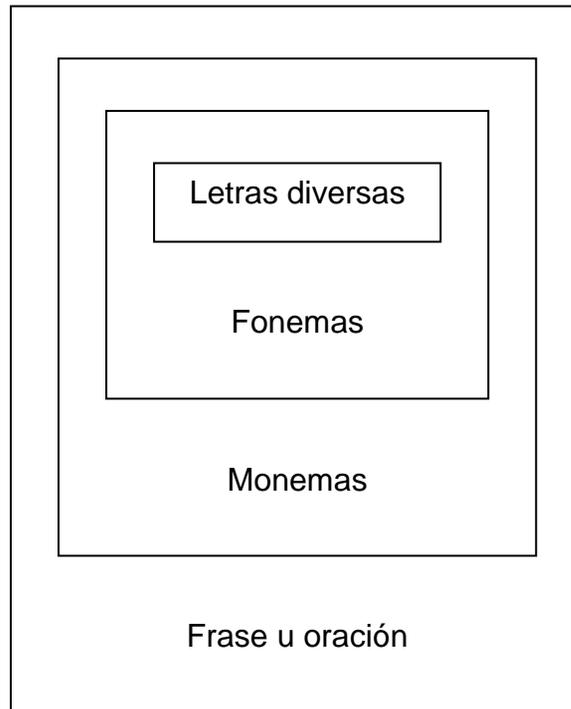


Figura 2.13 Estructura del modelo de la doble articulación del lenguaje humano

- La idea o concepto es una representación mental de un objeto, sin afirmar ni negar nada acerca de él. La señal más fácil para reconocerla es que una idea suele expresarse con una sola palabra. Ello no es obstáculo para poder expresar una idea con dos o más palabras. Lo importante es que no se afirma ni se niega nada
- El juicio es la afirmación o negación de una idea respecto a otra
- El raciocinio es la obtención de un conocimiento nuevo a partir de otros ya establecidos

Estos tres tipos de pensamientos constituyen, a su vez, las tres partes fundamentales de la Lógica formal (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 61 a 63).

Por último, a cada pensamiento corresponde una expresión extramental:

- El término o palabra es la expresión (oral o escrita) de una idea
- La proposición o enunciación es la expresión externa de un juicio
- La argumentación es la expresión de un raciocinio

Se puede afirmar en este punto, que los diversos pensamientos que trata la lógica, se pueden poner en correspondencia con los niveles de proceso de articular: las representaciones sensibles o imágenes corresponden al Nivel 0: los preconceptos; las ideas o conceptos corresponden con el Nivel 1: el aglomerado conceptual; los

juicios corresponden al Nivel 2: la estructura conceptual; y por último, el raciocinio corresponde al Nivel 3: el sistema conceptual.

La utilización de la Lógica ofrece una herramienta intelectual muy útil para la descripción de las características de cada uno de los niveles, así como el ayudar a especificar como se evoluciona de un nivel a otro; y como ya se ha mencionado, que el conocimiento con el que se trabaja en el proceso de articular es de carácter matemático, y bajo la consideración de que los conceptos matemáticos que se pretenden articular por medio del proceso de articular deben contener los elementos suficientes para realizar dicho proceso, esto no es suficiente para responder las interrogantes mismas que surgen del proceso de articular; de ahí la importancia del uso de la Lógica; esta característica se puede observar en lo que comenta Márquez Muro (1971), en comparativa con el pensamiento matemático:

“En las distintas combinaciones de ideas, juicios y raciocinios (materia de estudio de la lógica), el acto del pensamiento ofrece semejanza con el estudio matemático. Sin embargo, la lógica, al igual que la matemática, establece relaciones entre las ideas, los juicios y los raciocinios, pero estas relaciones no son de una manera rígida e inflexible; al relacionarse las ideas entre sí se busca la mejor forma de expresar su contenido.” (Márquez Muro, 1971, pp. 43,44).

Es precisamente por esta última razón, que la Lógica formal ofrece un marco de referencia con un sustento bastante adecuado para describir el proceso de articular conceptos matemáticos.

2.9.2.1 El Nivel 0: Los preconceptos

Todo el proceso de articulación parte de utilizar los conceptos matemáticos como las partes elementales para realizar dicho proceso, pero surge la pregunta ¿Cómo se forman los conceptos?; para ofrecer una posible respuesta, es necesario definir como se constituyen los conceptos; para ello se plantea la etapa de los preconceptos, que da como resultado las ideas o conceptos. Usando como marco de referencia la Lógica formal (ver Anexo 2) sobre el fenómeno de la adquisición del conocimiento, las representaciones internas (sensibles e intelectuales), así como de la operación de la simple aprehensión, se presenta el siguiente esquema (ver figura 2.14).

En un estado extramental, el sujeto que realiza la construcción de un concepto (que podría ser de carácter matemático), parte de observar (en el sentido amplio que le permiten sus sentidos) un fenómeno real o un objeto físico. También es posible que realice dicha observación sobre un objeto abstracto, como es el caso en que los estudiantes analizan un concepto o tema de matemáticas, que por analogía, bien podría definirse como un “objeto matemático”.

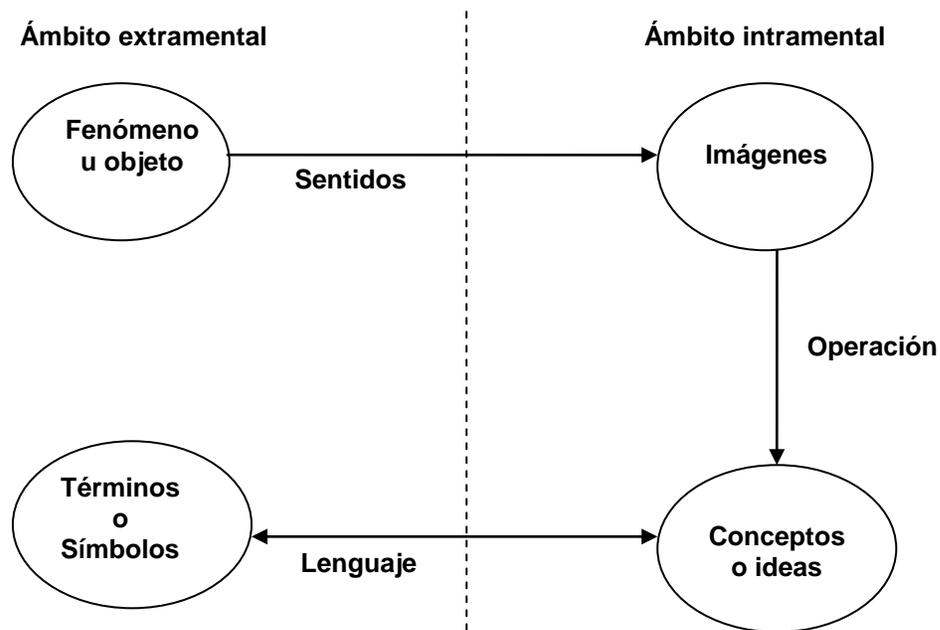


Figura 2.14 Estructura de los preconceptos, constituyentes de los conceptos

El mencionado esfuerzo que el sujeto realiza, produce en su mente (ámbito intramental), la generación de las primeras representaciones internas, llamadas imágenes, que como ya se ha mencionado, solo constituyen “fotografías de los rasgos particulares del objeto en estudio” y que evolucionan de su carácter de singularidad a una universalidad, por medio de la operación llamada simple aprehensión, logrando alcanzar el nivel de idea o concepto, los cuales se definen como: *“la representación mental de un objeto, sin afirmar o negar nada de él”* (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.71). Todo esto se logra por la capacidad de pensamiento del individuo implicado. Finalmente, cuando la mente del sujeto ha logrado captar el contenido inteligible allí encerrado, se vale del lenguaje, el cual *“es todo medio, sea el que sea, de expresar las ideas”* (Mounin, 1974, pp.29), lo que comprende del concepto que ha entendido, en forma de términos ó palabras (expresión, oral o escrita, de una idea) (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.63) ó símbolos: *“Figura o divisa con que se representa un concepto, por alguna semejanza que el entendimiento percibe entre ambos”* (Diccionario Océano Uno, 1992). En un ambiente de la disciplina matemática, el término de un concepto matemático sería la definición formal de la idea matemática, de manera verbal o escrita; sus símbolos bien podrían ser la grafica, tabla numérica o ecuación algebraica, etc.; vinculada al concepto matemático. Por tanto, se propone que **al conjunto que forma el concepto o idea con sus respectivos términos y símbolos de carácter matemático, se le puede denominar saber matemático**, entendiéndose por saber al: *“poseer una serie de representaciones intramentales (conceptos o ideas) y extramentales (términos y símbolos)”* (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.54).

Finalmente, se puede decir en este punto, que el Nivel 0 trata sobre los llamados preconceptos, los cuales son:

- El fenómeno u objeto físico o matemático, según sea el caso
- Las imágenes
- El concepto o idea lograda
- El término y/o símbolos expresados

En cuanto a los dos primeros, son lo que se podrían denominar como preconceptos. Los dos últimos, son el producto de haber evolucionado en dicho nivel. Es necesario aclarar que el uso de los sentidos, la realización de la operación de la simple aprehensión y la comunicación por medio del lenguaje que realiza el sujeto, son aspectos propios de éste al actuar y conducirse durante la realización de las actividades que implica el Nivel 0 del proceso de articular.

Las características del fenómeno o del objeto físico o matemático, según fuera el caso, sería muy diverso y no tendría sentido el extenderse demasiado sobre este punto, con respecto al presente trabajo; pero, las características que se pueden mencionar sobre las representaciones sensibles o imágenes, son dignas de mencionar, debido que permiten dilucidar aspectos relevantes de cómo se evoluciona dentro de este nivel, durante el proceso de articular. Las representaciones sensibles o imágenes:

- Son captadas por medio de los sentidos
- Son reproducidas por la imaginación
- Son de carácter singular (se refieren a un solo objeto)

Se puede observar que las dos primeras son características psicológicas inherentes al sujeto (uso de los sentidos y la imaginación), y por tal motivo, no interesan a éste análisis. La última, nos permite suponer que refleja el aspecto inicial del razonamiento inductivo: partir de lo particular.

Para ejemplificar lo antes dicho, se presenta el siguiente ejemplo de un saber matemático específico, con sus conceptos y representaciones que lo conforman: el concepto matemático de triángulo.

En el desarrollo lógico de cualquier rama de las matemáticas, en cada definición de un concepto y en cada relación intervienen otros conceptos y relaciones. Por lo tanto, la única manera de evitar un círculo vicioso consiste en admitir que ciertos conceptos y relaciones primitivas (por lo general, tan pocos como se pueda) permanezcan indefinidos (Synge¹, 1951, pp. 32 a 34). Del mismo modo, la demostración de cada proposición se vale de otras proposiciones y, en consecuencia, hay proposiciones primitivas, que se llaman axiomas o postulados, que se dejan sin demostrar.

El tratamiento moderno de la geometría acostumbra reconocer el concepto primitivo de punto y las dos relaciones primitivas de mediación (la idea de que un punto se

encuentre entre otros dos) y de congruencia (la idea de que la distancia entre dos puntos sea igual a la distancia entre otros dos puntos, o que dos segmentos de recta tengan la misma longitud) (Coxeter, 1984, pp. 26, 27).

En el desarrollo de Pasch de la geometría ordenada, simplificado por Veblen, los únicos conceptos primitivos son los puntos A y B y la relación de mediación $[ABC]$, que dice que B está entre A y C . Si B no está entre A y C , se dice simplemente “no $[ABC]$ ” (Coxeter, 1984, pp. 209 a 211).

Axioma 1: Hay por lo menos dos puntos.

Axioma 2: Si A y B son dos puntos distintos, hay por lo menos un punto C tal que $[ABC]$.

Axioma 3: Si $[ABC]$, entonces A y C son distintos: $A \neq C$.

Axioma 4: Si $[ABC]$, entonces $[CBA]$ pero no $[BCA]$.

Definición de segmento: Si A y B son dos puntos distintos, el segmento AB es el conjunto de los puntos P para los que $[APB]$. Se dice que este punto P está en el segmento.

Definición de intervalo: El intervalo \overline{AB} es el segmento AB más sus extremos A y B :

$$\overline{AB} = A + AB + B.$$

Definición de rayo: El rayo A/B (“desde A y en dirección opuesta a B ”) es el conjunto de puntos P para los que $[PAB]$.

Definición de recta: La recta AB es el intervalo \overline{AB} más los dos rayos A/B y B/A :

$$\text{Recta } AB = A/B + \overline{AB} + B/A.$$

Corolario: Intervalo $\overline{AB} = \text{intervalo } \overline{BA}$; recta $AB = \text{recta } BA$.

Axioma 5: Si C y D son puntos distintos en la recta AB , entonces A está en la recta CD .

Axioma 6: Si AB es una recta, hay un punto C que no está en ella.

Teorema: Si C no está en la recta AB , entonces A no está en BC , ni B en CA : las tres rectas BC , CA , AB son distintas.

Demostración. Por el Axioma 5, si A estuviera en BC , C estaría en AB .

Definición de triángulo: Los puntos que están en la misma recta reciben el calificativo de colineales. Tres puntos no colineales, A , B , C determinan un triángulo ABC que consiste en estos tres puntos, llamados vértices, junto con los tres segmentos BC , CA , AB , que se llaman lados.

A continuación, se muestra una posible estructuración de las ideas y sus representaciones del concepto de triángulo, basada en una técnica de los modelos conceptuales, perteneciente al estudio del enfoque de sistemas (ver figura 2.15).

Es de notarse que al definirse los conceptos presentados, éstos se expresan en forma de términos, que expresan las ideas que se encuentran vinculadas con el concepto de triángulo. También se puede dilucidar que cuando se quiere explicar más allá de la llana definición de los conceptos que la constituyen, se recurre a imágenes particulares, que lleven a recordar la idea de la que se está hablando; es ahí cuando se entra al terreno de las representaciones sensibles. En conclusión, es muy delgada la línea que divide a las representaciones sensibles (imágenes), de los saberes matemáticos, de sus respectivas representaciones intelectuales (conceptos o ideas) expresados en forma de términos.

Por otro lado, las representaciones intelectuales o pensamientos, muestran las siguientes características generales:

- Se captan por la inteligencia, de tal manera que los sentidos son ciegos para el contenido captado por el entendimiento, que se mueve, indudablemente, en un plano superior.
- Son universales, aplicables a todos los seres que presentan alguna característica en común.

Hay que hacer notar, que la segunda característica listada, confirma la premisa antes planteada, lo cual da evidencia para declarar que **la forma en que la operación intelectual de la simple aprehensión permite evolucionar de las imágenes a los conceptos, en el Nivel 0, es a través del uso del razonamiento inductivo** (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 208), **el cual parte de lo particular a lo general, de lo singular a lo universal.**

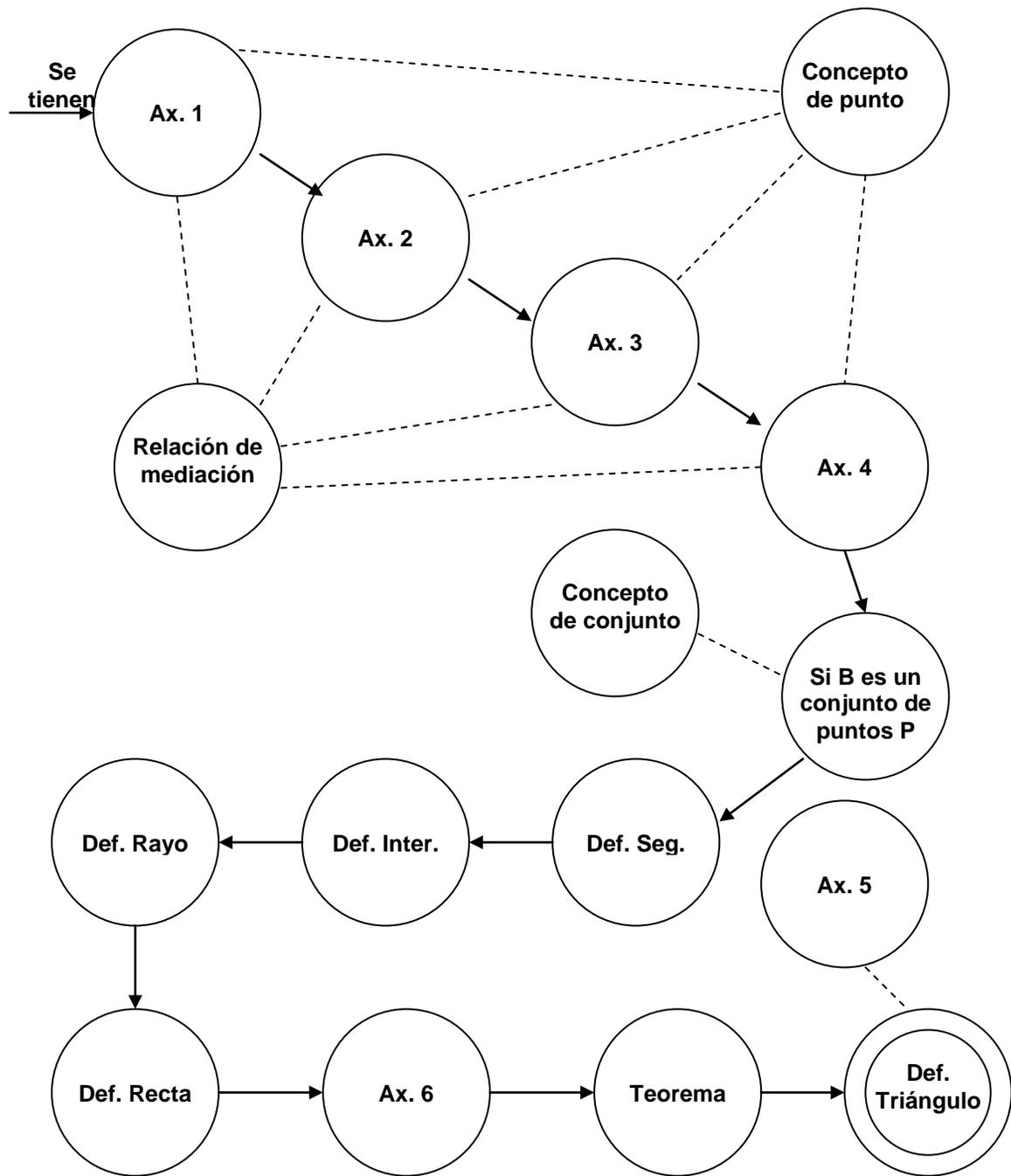


Figura 2.15 Preconceptos que conforman el concepto de triángulo

Hay que mencionar que el razonamiento inductivo, “es aquel raciocinio en donde, a partir de la observación de una relación constante entre fenómenos, se obtiene una relación esencial, y por tanto, universal y necesaria entre dichos fenómenos” (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 206). Este proceso depende de una relación esencial, la cual es captada en una serie de experiencias singulares (a veces solo bastaría un

solo caso); es muy válido inferir que todos los casos inviscerados en dicha esencia poseen la propiedad indicada. Por medio de este tipo de raciocinio es como se obtienen las leyes de las ciencias físicas y naturales. De ahí su máxima importancia en el tratamiento del conocimiento científico (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 206).

2.9.2.2 El Nivel 1: el conglomerado conceptual

El Nivel 1 es donde se identifican el conjunto de los conceptos o saberes, entendiéndose esto como la forma de escoger los elementos de un conjunto: *“un conjunto está definido, cuando un elemento cualquiera, se puede decidir si pertenece o no a ese conjunto”* (Serrano, 1977, pp.7). Los elementos a seleccionar deben poseer características que permitan tomar un criterio de homogeneidad para un concepto matemático en específico, que más adelante en el proceso de articular, constituirán un ente de conocimiento articulado.

Tomando conceptos de la teoría general de sistemas (ver Anexo 2), podríamos decir que el conglomerado de los saberes matemáticos de este nivel, esta desprovisto de sinergia *“la suma de los objetos o conceptos implicados, es igual al todo”* (Bertoglio, 1986, p.37), lo que quiere decir, que el simple hecho de reunir un conjunto de conceptos, no da por hecho que exista la interconexión entre las ideas matemáticas en estudio, ya que es necesario saber como se interrelacionan unas con otras.

Usando como contexto la teoría de conjuntos, podemos decir que en este nivel de articulación, el aglomeramiento de los saberes matemáticos, se podría denotar como:

$$\mathbf{S} = \{ (\mathbf{c}_0, \mathbf{s}_0), (\mathbf{c}_1, \mathbf{s}_1), (\mathbf{c}_2, \mathbf{s}_2), (\mathbf{c}_3, \mathbf{s}_3), (\mathbf{c}_4, \mathbf{s}_4), \dots, (\mathbf{c}_i, \mathbf{s}_i) \}$$

Donde **S** es el conglomerado de los saberes y los pares ordenados representan las parejas que forman el conjunto de los conceptos o ideas (**c_i**) y el conjunto de sus respectivas representaciones (términos y símbolos) (**s_i**). En este nivel, se nota claramente la ausencia de sinergia, como ya se ha mencionado; la noción de conjunto es adecuada a éste respecto debido a que se basa que la suma de las partes, explica el todo (ver figura 2.16).

Hay que aclarar que los conceptos matemáticos, deben presentar algunas características básicas, de las cuales presenta la Lógica sobre los conceptos en general:

- No son solo imágenes (representaciones sensibles); son representaciones intelectuales, propias del ámbito intramental
- Es la “célula” más simple dentro de la organización interna de los pensamientos
- Los conceptos no afirman o niegan nada

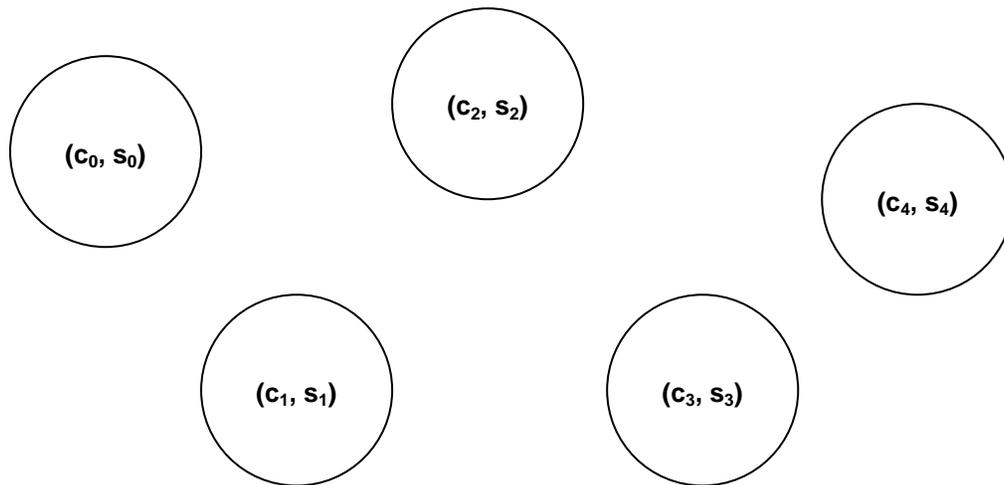


Figura 2.16 El conglomerado de los saberes

Es sabido que los conceptos matemáticos no constan únicamente de mostrar algunas representaciones de ellos (una gráfica o una expresión algebraica), para decir que se ésta frente a un concepto matemático, el cual supone un sujeto cognoscente. Es necesario ir más allá en el plano intelectual; haber encontrado la esencia de la idea que representan esas representaciones, objeto o fenómeno; para haber logrado alcanzar el concepto (Gutiérrez Sáenz, 2004). Cuando se llega a ese estado, es cuando se puede decir que se ha obtenido un saber, que es como se ha mencionado, el conjunto formado por el concepto y sus representaciones, pero aun así, el acto de articular en este nivel de articulación, se sigue considerando un acto intelectual. Es por eso que las representaciones de una idea y las imágenes que surgieran de ella, no son suficientes por si solas, para entender la plenitud de un concepto matemático.

A continuación, se muestra un ejemplo que ilustra el conglomerado de conceptos y sus representaciones, de un saber matemático específico, como lo es el área de un triángulo cualquiera. El siguiente ejemplo, permite mostrar como se va evolucionando en la jerarquía de los niveles del proceso de articular, por lo que se recurrirá a éste en las secciones siguientes de éste capítulo. El citado ejemplo parte de la forma en como se presenta dicho saber matemático en el estudio de la geometría plana:

Cálculo del área de un triángulo cualquiera, basado en el promedio de su base por su altura (Baldor, 1982, pp. 210, 211): “El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura”.

Hipótesis:

El triángulo ABC (ver figura 2.17), es un triángulo de base $AB = b$ y altura $CD = h$.

$$\text{Tesis: } A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Construcción auxiliar:

Por el vértice C , se traza una paralela al segmento AB y por el vértice B , se traza una paralela al segmento AC . Sea E el punto en que se cortan las líneas trazadas. Se forma el paralelogramo $ABEC$ y el triángulo ECB . Se traza la altura BF del triángulo ECB .

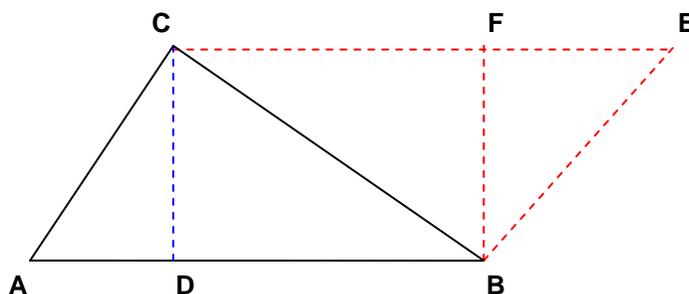


Figura 2.17 Paralelogramo formado por dos triángulos

Demostración:

$$A_{ABC} = A_{ABEC} - A_{ECB} \quad (1) \quad \text{Diferencia de áreas;}$$

$ABEC$ es un paralelogramo $CE \parallel AB$ y $BE \parallel AC$ por construcción;

Por hipótesis;

$$\text{y } AB = b$$

$$CD = h$$

$$\text{Por tanto } A_{ABEC} = b h \quad (2)$$

Además:

En los triángulos ECB y ABC :

$$\left. \begin{array}{l} BC = BC \\ AC = EB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Lado común;} \\ \text{Lados opuestos de un paralelogramo;} \end{array}$$

$$AB = EC$$

Por tanto, $\Delta ECB = \Delta ABC$

Por tener los tres lados iguales;

Por tanto, $A_{ECB} = A_{ABC}$

(3) Figuras congruentes tienen áreas iguales;

Sustituyendo (2) y (3), en (1):

$$A_{ABC} = b h - A_{ABC}$$

Por tanto, $A_{ABC} + A_{ABC} = b h$

Trasponiendo;

Por tanto, $2A_{ABC} = b h$

Sumando;

$$\text{Por tanto, } A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Despejando;

$$\text{Por tanto, } A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Llamando A el área del ΔABC .

Después de realizar un análisis minucioso de la anterior información sobre el cálculo del área de un triángulo cualquiera, se identificaron los conceptos siguientes:

- Concepto de área
- Concepto de polígono
- Concepto de Paralelogramo
- Área del paralelogramo
- Diferencia de áreas en el paralelogramo
- Par de triángulos en el paralelogramo
- Semejanza entre dos triángulos
- Semejanza de las áreas de dos triángulos
- Área del triángulo

La ausencia de sinergia en el conglomerado conceptual del Nivel 1, desde el punto de vista de la teoría de la información, indica que el nivel de caos es elevado, es decir, la entropía es alta. La teoría de la información, que surgió de la teoría general de sistemas a mediados del siglo XX, por contribuciones de Norbert Wiener, considerado el padre de la Cibernética, el cual sometió el contenido de la información y la entropía a un análisis profundo y minucioso. Le interesaba saber por qué estaban relacionadas la cantidad de información y la entropía. Wiener llegó a una conclusión de sencillez desconcertante: ambas caracterizan la realidad desde posiciones peculiares, con un punto de vista propio: la entropía y la información consideran el mundo en correlación del caos y el ordenamiento; así lo afirma: “*La entropía es la medida del caos, la cantidad de neguentropía (información) es la medida del ordenamiento*” (Pékelis, 1977, p.136).

Lo anterior da pauta para declarar que la cantidad de neguentropía es la medida de disminución de la incertidumbre de una cierta situación (Pékelis, 1977, p.180), lo cual constituye el hecho de que *“la neguentropía se encuentra en dependencia reciproca de la entropía”* (Pékelis, 1977, p.137):

Información = entropía + neguentropía

El principio neguentrópico de la información reúne en una nueva base la entropía y la información, señalando que no se las puede interpretar separadamente y que siempre deben ser investigadas en conjunto. Esta tesis es correcta para distintos campos de aplicación (Pékelis, 1977, p.138). El presente estudio no es ajeno a este respecto.

La información neguentrópica comienza a hacerse evidente cuando los saberes matemáticos que se encuentran aglomerados, empiezan a establecer vínculos, interrelaciones entre ellos; el grado de desorden empieza a decrementar, y aumenta el grado de organización. Este es el momento en que se puede hablar de que se ha conformado una estructura.

La estructura significa esencialmente construcción, en el sentido corriente del término; ésta existe porque hay unidades de formas diferentes, utilizadas según reglas de ensamblaje diferentes, y en un orden determinado. Hay estructuras porque hay elección en la colocación de las unidades. ¿Cuál es el criterio de esta elección?. Es la función, la noción capital. Siempre que se hable de estructuralismo sin hablar a la vez de funcionalismo, habrá razones para temer que se trate de pura charlatanería, o incluso **psitacismo** absolutamente vacío (Mounin, 1974, p.71 a 73). El concepto de función, se define como: *“la capacidad de acción de un ser apropiada a su condición natural o al destino dado por el hombre* (Diccionario Océano Uno, 1992).

En otras palabras, la función intrínseca de los saberes matemáticos, permiten que éstos posean las características suficientes para poder realizar acciones determinadas, que los lleve a vincularse unos con otros. Bajo el marco de referencia de la Lógica formal, se podría afirmar que las agrupaciones de conceptos o ideas matemáticas que tienen esta propiedad, se les denomina juicios. La diferencia entre concepto (idea) y juicio es que la primera no afirma ni niega nada; y, en cambio, la esencia del juicio muestra una relación entre dos conceptos (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.126, 128).

La idea que ofrece el juicio, el cual tiene como propósito el afirmar o negar algo, permite visualizar que hay dos componentes conceptuales que mantienen un vínculo entre ellos, en el caso de ser afirmativo; en caso contrario, esto lleva a pensar que dicho vínculo no existe. Ahora, el vínculo que existe en el juicio (el verbo) que afirma o niega algo, y que implica llevar a cabo una acción, o el acto en si, se le puede caracterizar como información semántica, un concepto perteneciente a la teoría de la información:

“Cuando un regulador transmite, a través de un sistema de mando a distancia, “órdenes” a una central eléctrica, lo que transmite es información semántica. Igualmente, una orden militar, un esquema de conexiones eléctricas, un mensaje codificado, las instrucciones en caso de incendio, un manual técnico, una partitura musical, etc., transportan esencialmente información semántica: preparan actos y modos de acción. La información semántica tiene pues, en general, un carácter puramente utilitario, pero, sobre todo, lógico, adhiriéndose al acto y a la significación.” (Moles, 1976, pp. 217).

Se tienen elementos para suponer que estas acciones, que realiza el sujeto que articula en el Nivel 2 del proceso de articular, se efectúan sobre los conceptos matemáticos de forma intramental y sobre los términos y los símbolos (representaciones del concepto matemático) relacionados a esas ideas matemáticas de manera extramental. El acto de relacionar conceptos, representaciones matemáticas es una actividad intelectual y de comunicación del individuo que articula.

Ya se ha mencionado, que en la definición de la idea de estructura, se tiene que el componente principal es el concepto de función, el cual se entiende como *“la capacidad de acción de un ser”* (éste ser puede bien consistir en un concepto y/o representación); esto conduce, por simple analogía, que la acción de vinculación de tipo intelectual llevada a cabo entre conceptos o saberes, cumple con el principio de funcionalidad que se encuentra presente en toda estructura.

Por otro lado, dentro de las diversas clases de juicios, según la Lógica, existen algunos que exclusivamente vinculan solo dos conceptos (juicio simple) y otros que vinculan más de dos conceptos (juicios compuestos) (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.129-136).

2.9.2.3 Nivel 2: La estructura conceptual

Se concibe al concepto de estructura como el *“conjunto de elementos interrelacionados que forman un todo”* (Diccionario Océano Uno, 1992); de acuerdo con esto, en este nivel, se puede decir que el conjunto de saberes matemáticos (formados por conceptos o ideas y sus respectivas representaciones basadas en términos y símbolos), se encuentran interrelacionados entre sí (ver figura 2.18); estas relaciones entre los saberes matemáticos se basan en dos aspectos: a) en las afinidades o filiaciones conceptuales que presentan entre ellos; y b) en el acto de buscar y especificar la manera de dar secuencia o seriación a dos saberes, de forma análoga, a como se busca colocar las fichas de domino, una detrás de otra para producir un efecto dominó entre ellas; esto, en el contexto matemático tratado, se logra a través de llevar a cabo procedimientos y algoritmos de tipo matemático, basados en diversas operaciones algebraicas, numéricas, gráficas, etc.

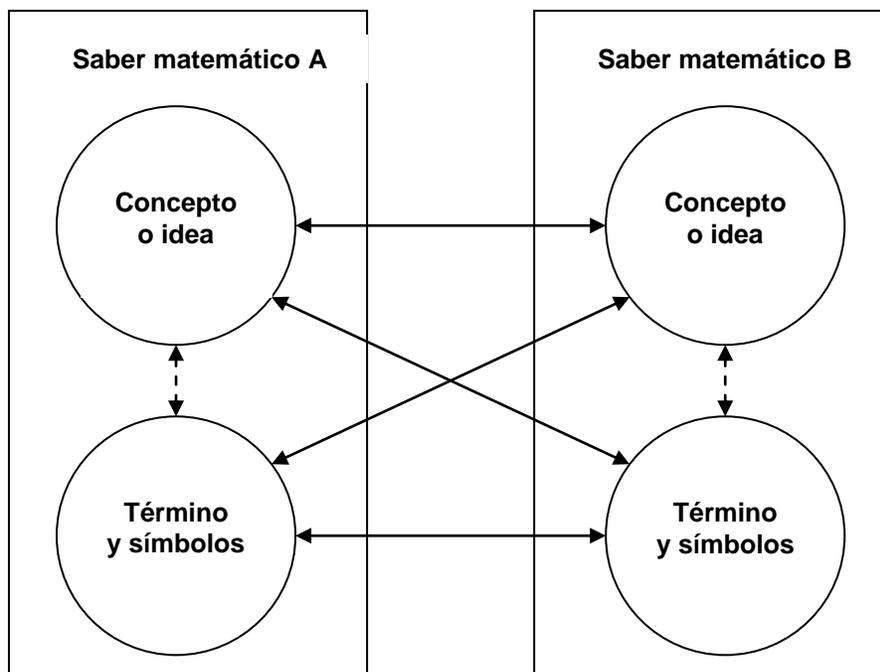


Figura 2.18 Los vínculos existentes de la estructura de los saberes matemáticos

Ya se ha comentado anteriormente que se pueden identificar diversas configuraciones estructurales en los juicios. Con el fin de llevar al terreno de la abstracción la idea de la estructuración, se usa como marco de referencia la teoría de funciones, en la cual la función se define como: “*si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder de algún modo un elemento único de un conjunto B, se dice que esa correspondencia es función*” (Lipschutz, 1991, pp.45). Si no se cumple la característica esencial de **unicidad** de correspondencia entre los elementos de los conjuntos implicados, entonces se está frente al concepto de relación. Por otro lado, una función constante se presenta cuando: “*cada elemento del conjunto A se le asigna el mismo elemento de B*” (Lipschutz, 1991, pp:47). Esto nos hace ver, que es posible representar a los juicios simples y compuestos, de forma análoga en su estructura, con las funciones y las relaciones.

Lo anterior conlleva a suponer, que en el contexto del Nivel 2, dos distintos saberes matemáticos, podrían encontrarse en cuanto a su estructura, vinculados intelectualmente de formas diversas: uno a uno (como funciones), uno a muchos (como relaciones), o inclusive, muchos a uno (como funciones constantes). Esto lleva a suponer que la estructura de los saberes matemáticos se podría concebir, mas que nada, como un conjunto de relaciones, o en otras palabras, como una gran relación, debido a que si hubiese interrelaciones entre saberes matemáticos que presentaran la forma de funciones, éstas, desde el punto de vista de la teoría de funciones, se considerarían un tipo particular de relaciones (Lipschutz, 1991, pp.87).

Si los vínculos entre dos saberes matemáticos se pueden abstraer como una relación, es muy factible pensar que las interrelaciones entre más de dos saberes, sean una relación de mayor envergadura, formando redes de conexiones, o mejor dicho, estructuras de carácter conceptual. Al generalizar la idea de las interdependencias entre saberes matemáticos, ésta se asemeja a la idea de otro concepto matemático: el grafo. La teoría de grafos, define un grafo como un conjunto de vértices (V) y aristas (E), las cuales permiten que los vértices se relacionen entre si. De manera formal:

$$G = (V, E)$$

donde V es un conjunto de vértices y E es una relación formada por pares ordenados, que vinculan a los vértices por parejas. (Johnsonbaugh, 1999, pp.306). Por ejemplo, supóngase que se tiene un conjunto de saberes matemáticos (V) en los cuales ya se han determinado las relaciones entre ellos (E). En forma general se podría decir que esta estructura podría ser representada como el grafo general (G):

$$G = (V, E)$$

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{(x, y) \mid x, y \in V; y = f(x)\}$$

Esto representa de manera formal la idea de estructura, debido a la especificación de las relaciones entre los saberes que conforman el conjunto V (ver figura 2.19).

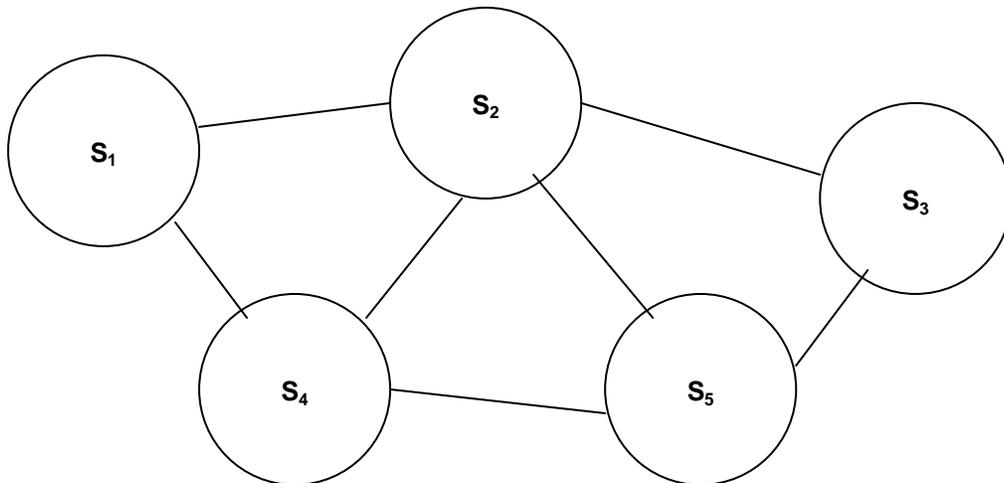


Figura 2.19 El Nivel 2: la estructura conceptual

Por lo anterior, se podría definir en forma de conjuntos a la estructura formada por los saberes, como sigue:

$$S_i = \{ (c_0, s_0), (c_1, s_1), (c_2, s_2), (c_3, s_3), (c_4, s_4), \dots, (c_i, s_i) \}$$

Donde S_i es el conjunto de los saberes matemáticos implicados, y

$$E = \{ (x,y) \mid x, y \in S_i; x \neq y; y = f(x) \}$$

E es la estructura conformada por el conjunto de parejas de saberes matemáticos, los cuales son diferentes entre si y se encuentran vinculados unos con otros.

Para ejemplificar la estructura conceptual de un saber matemático específico, se continúa con el ejemplo basado en el concepto antes tratado, sobre el cálculo del área de un triángulo cualquiera (ver figura 2.20). Las interrelaciones mostradas representan las operaciones y procedimientos que se dan entre los diversos conceptos presentados.

Desde el punto de vista intelectual, el Nivel 2 del proceso de articular, ofrece la conformación de una forma de pensar, la cual se entiende como: *“barajar las representaciones intramentales y extramentales ya obtenidas, combinarlas e inclusive inferir otras nuevas”* (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.54). El acto de pensar se denomina también pensamiento, y en el contexto específico del presente estudio, se cree que podría decirse que el transitar por el subproceso del Nivel 2 del proceso de articular, contribuye a formar un pensamiento articulado en el sujeto que realiza Articulación de Saberes Matemáticos.

Una vez que se tiene una estructura entre los saberes matemáticos, en la presencia del sujeto que articula, de un pensamiento matemático articulado, este puede evolucionar a un Conocimiento Matemático Articulado, entendiéndose conocimiento, bajo la perspectiva de la Lógica formal, como:

“No es lo mismo pensamiento que conocimiento. El pensamiento está incluido en el conocimiento. Cada vez que el hombre conoce algo, obtiene en la mente una serie de pensamientos. Por su parte, los verbos conocer y pensar también expresan fenómenos diferentes: conocer es captar algo trascendente a la misma mente. Pensar es barajar esas representaciones ya obtenidas, combinarlas e inclusive inferir otras nuevas” (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.54).

En términos de la lógica formal, la interrelación de juicios o estructura de saberes, formada por los conceptos, evoluciona a lo que se denomina raciocinio lógico. El acto de razonar consiste en obtener nuevas verdades a partir de las ya conocidas, dando como producto el pensamiento llamado raciocinio (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.168).

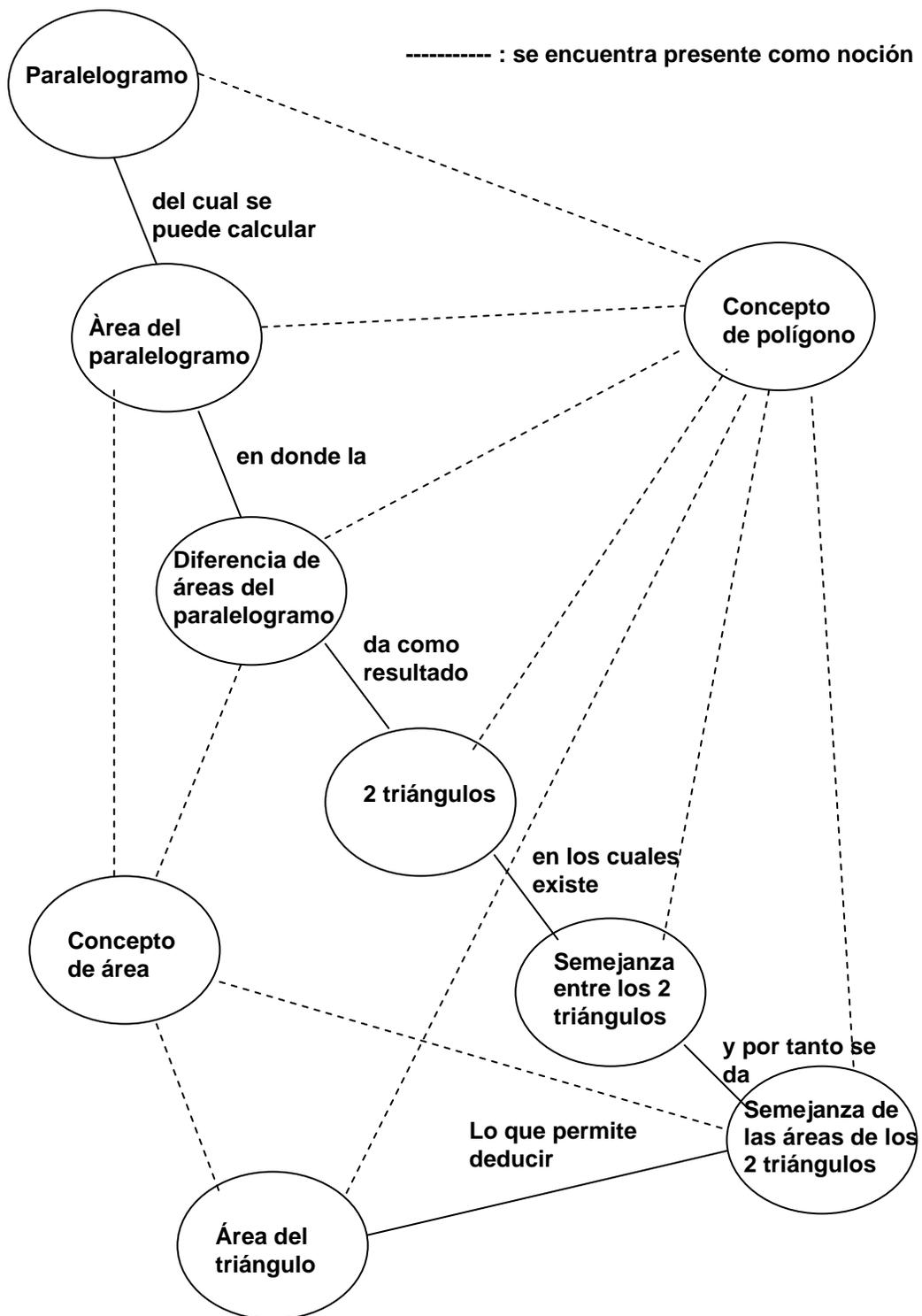


Figura 2.20 Estructura conceptual conformada por saberes matemáticos, relacionados con el concepto del área de un triángulo cualquiera (Baldor, 1982, pp.210,211)

El raciocinio lógico está compuesto de antecedente y consecuente (o bien, de premisas y conclusión; de datos y respuestas). Lo importante en este conjunto de juicios es que estén combinados entre sí para que efectivamente el consecuente se derive con un nexo necesario a partir del antecedente. Así como un conjunto de ideas cualquiera no basta para formar un juicio (recordando que lo esencial del juicio, es la afirmación existencial del nexo entre dos o más ideas), así también, un conjunto cualquiera de juicios no basta para formar un raciocinio. Se necesita que el último de ellos (el consecuente) esté ligado de un modo necesario con los anteriores (antecedente). Lo típico en este pensamiento es, pues, la ilación o nexo necesario entre antecedente y consecuente. (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.165)

Un ejemplo de raciocinio es un problema matemático ya resuelto. Los datos son el antecedente. La respuesta es el consecuente. El esfuerzo u operación mental que encontró la respuesta se le llama acto de razonar. Se denomina argumento a la expresión externa (oral o escrita) de un raciocinio; éste se compone de juicios, y éstos a su vez, de ideas o conceptos.

Solamente una madurez intelectual lleva al hombre a pensar por si mismo y a la realización de raciocinios profundos y certeros (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.168). Esa madurez intelectual se le denomina conocer, que es el *“captar algo trascendente a la misma mente”* (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.54).

Se ha mencionado que los saberes forman una estructura, que desde el punto de vista de la teoría de los sistemas, éste es el antecedente de lo que se conoce como el sistema. Una vez definida la estructura de saberes del nivel anterior, el Nivel 3 busca que la mencionada estructura, alcance un objetivo, tenga un propósito; ésta es la característica que diferencia a la estructura del sistema: *“conjunto de cosas que, ordenadamente relacionadas entre sí, contribuyen a un fin determinado”* (Diccionario Océano Uno, 1992). Este fin, propósito u objetivo a alcanzar, lo determina y fija el sujeto que articula, cuando alcanza el Nivel 3 del proceso de articular. Este consiste por lo regular, en llegar a un saber matemático específico, que se especifica como la meta a alcanzar, a la cual se llega por medio de seguir una ruta específica en la estructura de saberes, y que partió, de algún saber matemático específico, también entendido como el inicio del recorrido. Todas estas consideraciones, decisiones y acciones, son asumidas por el sujeto que articula. Estos aspectos son lo que se podría denominar en los sistemas, como parte de la información que organiza o neguentropía, existente dentro del sistema de saberes matemáticos, ya que esta se encuentra presente desde la conformación del aglomerado y la estructura, que conforman los saberes matemáticos.

2.9.2.4 Nivel 3: El sistema conceptual

El sistema de los saberes matemáticos se podría concebir como una evolución del pensar al conocer del sujeto que articula. Esto es debido a que cuando se poseen saberes matemáticos diversos, formados por conceptos matemáticos y sus

representaciones, y al lograr vincularlos intelectualmente unos con otros, la estructura de éstos permite trazar rutas o caminos para comprender saberes matemáticos especificados como metas a alcanzar; a esta serie de componentes y acciones tomadas sobre ellos es lo que se podría denominar como argumento matemático, el cual busca alcanzar el objetivo previamente propuesto por el sujeto, cuando se lleva a cabo el proceso de articular.

Para ilustrar lo anterior, supóngase que se tienen cuatro saberes diferentes: A, B, C y D (ver figura 2.21). El concepto D es un saber matemático al cual se desea llegar a entender y comprender (objetivo a alcanzar); en la grafica es marcado como un círculo concéntrico. Para alcanzar este fin, se debe comenzar en algunos de los saberes restantes A, B o C. Supóngase que sea el saber A, el que se marque como el inicio, para comenzar con este “recorrido intelectual” hacia el saber D; pero es de notarse que existen diversas rutas de acceso de A a D. Los caminos posibles son: ABD, ACBD y ACD.

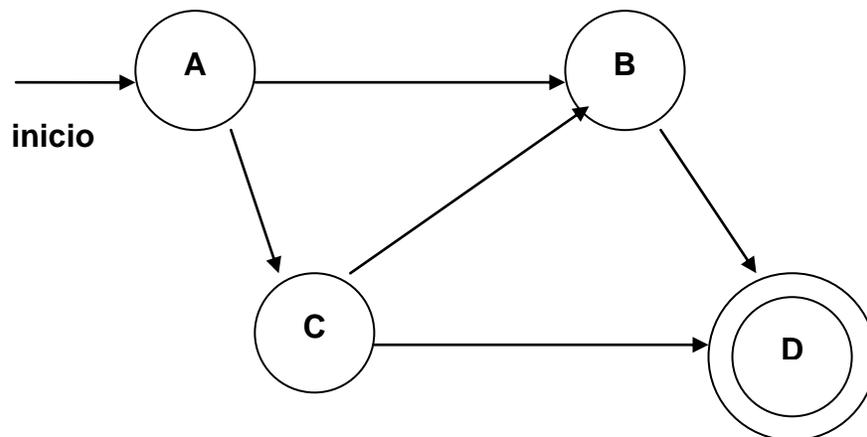


Figura 2.21 Sistema formado por los saberes A, B, C y D

Como ejemplo de un sistema conceptual, conformado para alcanzar un saber matemático específico, se continúa con el ejemplo basado en el concepto antes tratado, sobre el cálculo del área de un triángulo cualquiera (ver figura 2.22). En el diagrama se advierte que existe un saber matemático como inicio, uno como fin a alcanzar (óvalos concéntricos), además de que se marca la ruta o camino a seguir, utilizando flechas con una dirección determinada.

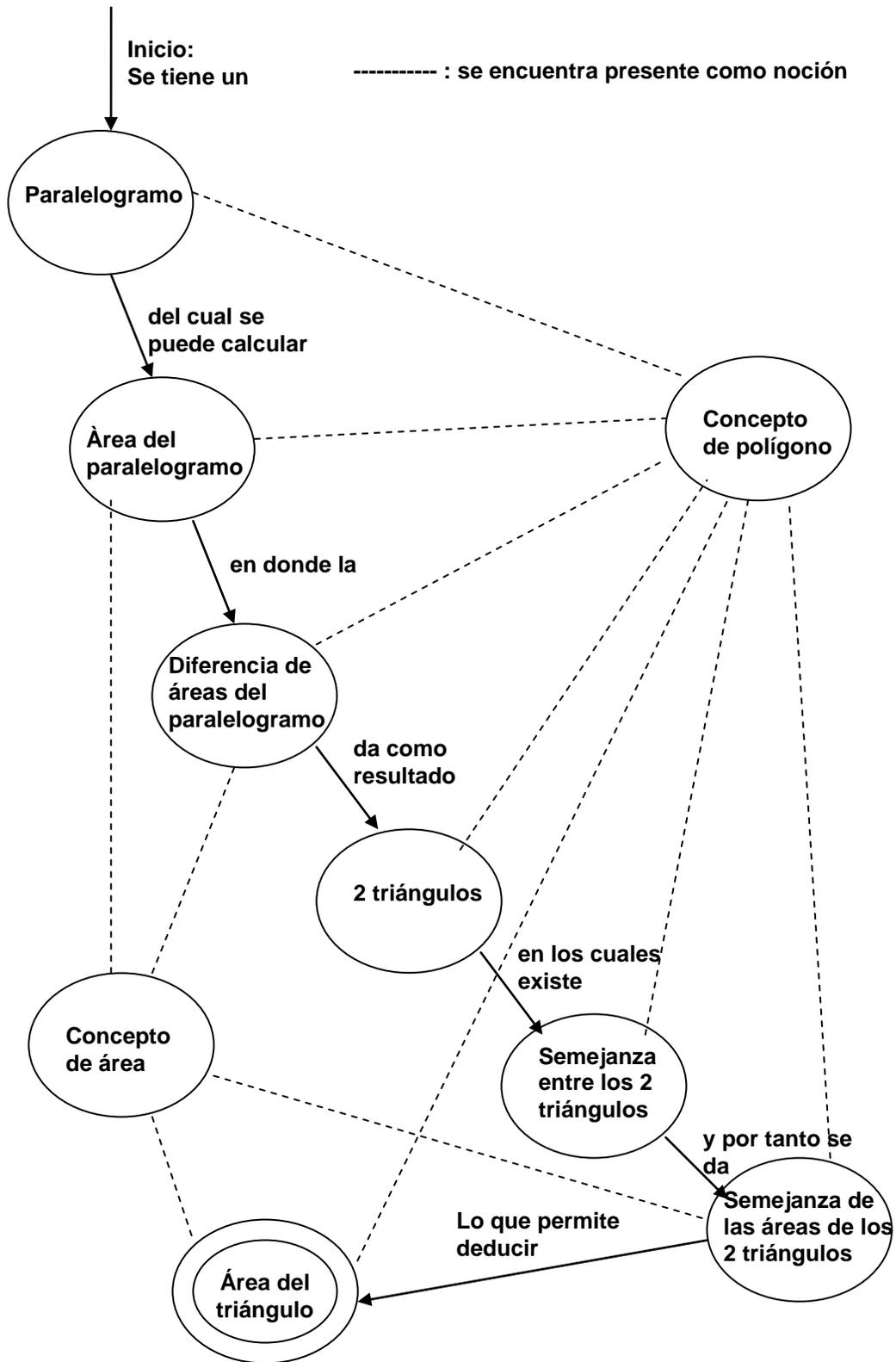


Figura 2.22 Sistema conceptual conformado por saberes matemáticos, que llevan al concepto del área de un triángulo cualquiera (Baldor, 1982, pp.210,211)

Los múltiples caminos conceptuales posibles en el sistema podrían interpretarse como parte de la totalidad de la información que organiza al mismo (neguentropía) ya que todos estos parten de un saber y llegan a otro, que se considera el objetivo: un sistema busca siempre alcanzar un propósito. Pero, una vez definidos el saber donde se inicia y donde se termina, el escoger una u otra ruta posible en el sistema de los saberes plantea la interrogante ¿cuál camino tomar?, o mejor aún, ¿cuál es la mejor u óptima ruta a tomar?. Éste es un cuestionamiento que se puede responder en gran medida, cuando se experimente con la jerarquía de niveles del proceso de articular en individuos, ya que la evaluación de los “mejores recorridos intelectuales”, es un hecho que se cree que está fuertemente vinculado con aspectos cognitivos de las personas entrevistadas. A manera de ejemplo se muestra las diversas formas presentadas en la diversa bibliografía matemática, que aborda el concepto del área de un triángulo cualquiera (ver figura 2.23).

Se puede llegar al cálculo del área de un triángulo, por medio de:

- El promedio de su base por su altura (Baldor, 1982, pp.210,211)
- Contar con la medida de sus 3 lados (Oteyza et al., 1994, pp.60, 73 – 76)
- Por medio del uso de proporciones trigonométricas (Oteyza et al; 1994, pp. 74, 75; Anfossi, 1998, p.45)
- El promedio de su base por su altura, usando expresiones algebraicas (Lehmann, 2001, pp.86, 88; Oteyza et al.,1994, pp.132 - 134)
- El promedio de su base por su altura, usando determinantes (Uspensky, 2001, pp.274 - 277; Baldor,1982, pp.209 - 211)
- La diferencia de áreas de poligonos (Landaverde, 1970, pp. 199; Uspensky, 2001, pp. 203 – 205; Kindle, 1991, pp. 2, 3)

Figura 2.23 Listado de las diferentes rutas conceptuales que existen para llegar al concepto del área de un triángulo cualquiera

En el sistema abstracto, del Nivel 3 del sistema de saberes matemáticos, se utiliza una ampliación del concepto de grafo (abordada en el Nivel 2) ya que además del conjunto de vértices (saberes) y aristas (interdependencias conceptuales entre saberes), existe un conjunto de etiquetas de las aristas, de la forma en como las presenta la matriz de incidencia (ver figura 2.24) concebida para los grafos, la cual

presenta un arreglo donde los renglones son los vértices y las columnas representan las etiquetas de las aristas. Si la intersección del renglón y la columna es 1, la arista es incidente en uno de los vértices, y si es 0, en caso contrario (Johnsonbaugh, 1999, pp.348); además, cuando se concibe el definir un saber como el inicio de la ruta o camino intelectual, y el saber que se considera el objetivo o meta a alcanzar de dicho recorrido, es necesario cambiar las aristas simples de un grafo, a las aristas incidentes de un grafo dirigido o dígrafo (Johnsonbaugh, 1999, pp.307), para explicitar que se va de un vértice a otro, y no a la inversa.

Esto lleva, a que la forma de expresar los vínculos intelectuales entre los saberes de este modelo sistémico, se expresan a través de funciones, en donde no sólo se expresan los saberes implicados, sino también su interrelación conceptual específica. De forma general, podemos decir, que si A, B y C son saberes y r1, r2, y r3, las aristas que los relacionan, las funciones que expresan esta vinculación se representan como:

$$\begin{aligned} f(A, r_1) &= B \\ f(A, r_2) &= C \\ f(B, r_3) &= C \end{aligned}$$

Que en forma gráfica se ilustra como en la figura 2.25.

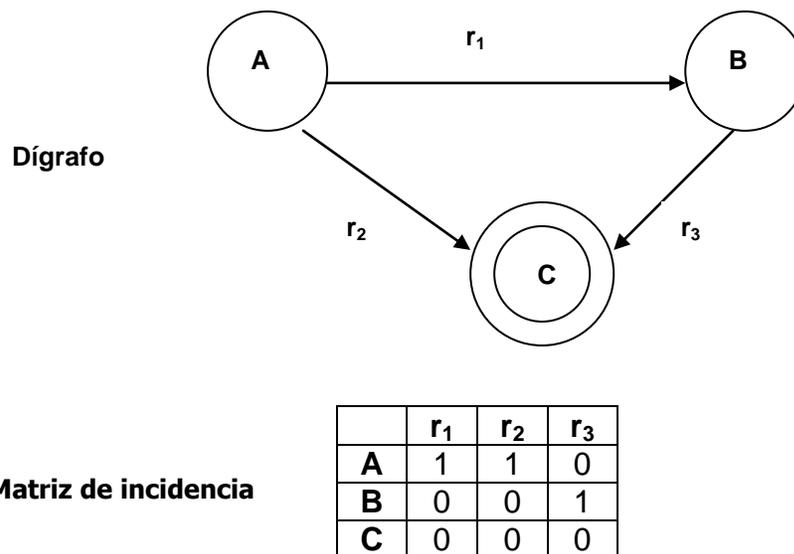


Figura 2.24 Representación de un dígrafo, por medio de su matriz de incidencia

Lo antes dicho, y de manera análoga, hace recordar al concepto de autómata finito: *“modelo matemático de un sistema, con entradas y salidas discretas, el cual esta formado por un conjunto finito de estados, uno de los cuales es el estado inicial y por lo menos uno es un estado de aceptación o final. Basándose en el estado actual y el símbolo recibido, ejecuta una transición de estado, que consiste en un cambio a otro*

estado.” (Hopcroft y Ullman, 1996, p.15) y (Brookshear, 1993, pp:29), concepto perteneciente a la teoría de la computación, y los cuales son concebidos como sistemas abstractos, que se representan como grafos dirigidos etiquetados, como los que se han planteado en el Nivel 3 del proceso de articular.

Para definir un camino o recorrido en los autómatas finitos, se recurre al concepto de las funciones de transición, las cuales son funciones discretas que relacionan dos vértices diferentes, por medio de una arista etiquetada (Hopcroft y Ullman, 1996, p.19) y (Brookshear, 1993, pp.32). Las funciones de transición parten de la noción de la ecuación o fórmula de recurrencia, abordada de manera común en los métodos numéricos, la cual se define como la “relación dos o más elementos consecutivos de una sucesión de números, funciones, matrices, etc.” (Iriarte V. Balderrama, 1990, pp.16).

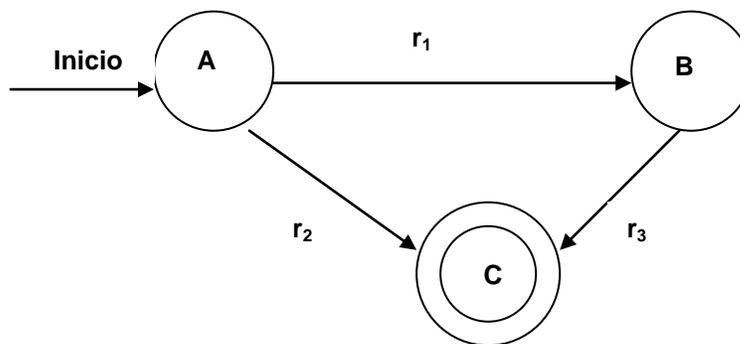


Figura 2.25 Representación gráfica de un sistema conceptual

Se ha establecido que la estructura que presentan los saberes es por su interrelación conceptual, basada en ciertas filiaciones entre los saberes, y que estas filiaciones sirven como “los puentes que conforman la ruta”. El funcionamiento de los autómatas finitos se basa en recorrer esa ruta, la cual se expresa en base a las funciones de transición. De manera análoga, los diversos caminos existentes en el sistema de los saberes, se pueden expresar como un conjunto de funciones de transición, que en forma sucesiva y dependientes unas de otras, permiten ilustrar como se alcanza un saber matemático específico. La acción de recorrer la ruta de los saberes y sus vínculos, así como el alcanzar el saber, marcado como el objetivo a alcanzar, podría concebirse como el adquirir, por parte del sujeto que articula, un Conocimiento Matemático Articulado.

Se puede definir formalmente al Nivel 3, en el cual se concibe un sistema formado por saberes matemáticos de la siguiente forma: ya se ha definido en el Nivel 2, la idea de estructura de los saberes, definiéndola con un grafo general; en el Nivel 3, basándose en ésta concepción y apoyándonos en la analogía con la definición de un sistema abstracto matemático como lo es el autómata finito (Hopcroft y Ullman, 1996, p.20) y (Brookshear, 1993, pp.32), se puede ofrecer una definición formal generalizada del modelo de sistema conceptual:

$$A = (S, R, f, s_0, s_n)$$

Donde:

$$S = \{ (c_0, s_0), (c_1, s_1), (c_2, s_2), (c_3, s_3), (c_4, s_4), \dots, (c_i, s_i) \}$$

$$R = \{ r_1, r_2, r_3, \dots, r_j \}$$

$$f = \{ (x, y, z) \mid x, z \in S, y \in R; \text{ donde } C \times R \text{ a } C \}$$

s_0 = es el saber matemático considerado como inicio

s_n = es el saber matemático considerado como objetivo a alcanzar

Entendiéndose cada uno de éstos parámetros como sigue (ver figura 2.26):

A: es el sistema de los saberes matemáticos o sistema conceptual (el argumento matemático)

S: es un conjunto de saberes, formados por los conceptos o ideas y sus respectivas representaciones (términos y símbolos), todos de carácter matemático.

R: es un conjunto de interrelaciones entre los saberes implicados, que consisten en filiaciones conceptuales entre los saberes. Las relaciones son diferentes entre los saberes.

f: son las funciones de transición que expresan relaciones entre los saberes matemáticos. Estas representan la información semántica que se da entre ellos. Esta información se compone de procedimientos o algoritmos (operaciones de tipo matemático) que son las acciones realizadas por el sujeto que articula.

s_0 : es el saber matemático que sirve de origen en el proceso de articular de saberes.

s_n : es el saber matemático que se considera como el objetivo a alcanzar.

Se ha dicho, que el argumento matemático como el de que se ha discutido hasta este punto, se puede visualizar como sistema de los saberes matemáticos o sistema conceptual matemático. Es bien conocido que los sistemas, poseen la característica fundamental de la recursividad, la cual permite concebir que el sistema abstracto aquí tratado, puede ser parte de otros sistemas conceptuales más grandes; es decir, los sistemas pueden ser parte de sistemas más grandes (subsistemas y supersistemas). Esto permite a su vez suponer, que un saber matemático producto de una argumentación matemática, o mejor dicho de una articulación de saberes del mismo tipo, se utilice como ente básico para estructurar otros conocimientos de mayor orden y complejidad. Esto permite entrever el carácter recursivo de la articulación; el décimo tercer principio de la articulación, habla sobre ésta suposición.

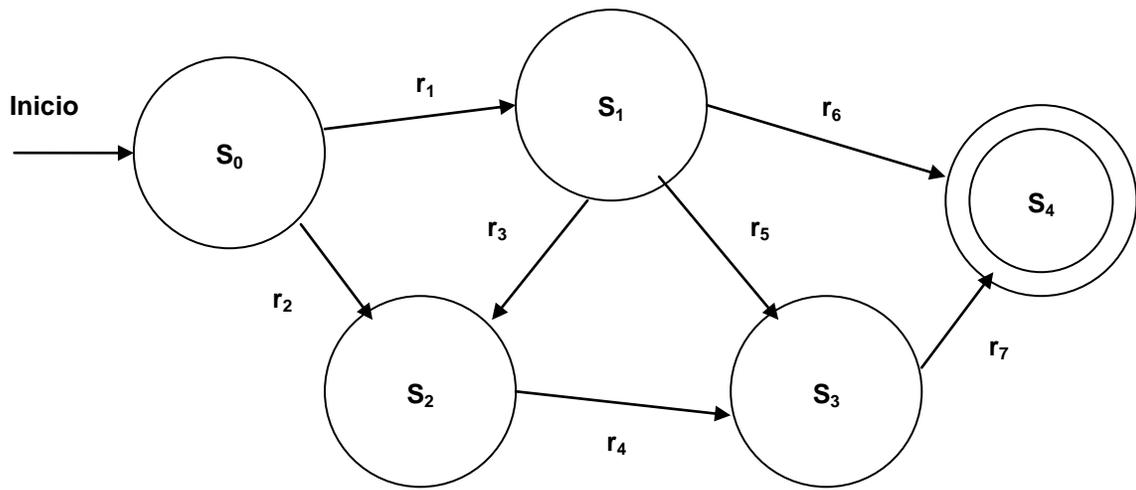


Figura 2.26 El Nivel 3: el sistema de los saberes o sistema conceptual

Capítulo III

Estado del arte

Se ha mencionado con anterioridad, que la NCTM (2000) plasma en su *Principio Curricular*, la importancia de un currículo matemático coherente, centrado en ideas matemáticas importantes y articulado. Esta preocupación sobre la estructura y diseño del currículo matemático y los temas que lo componen, han sido centro de atención de diversos estudios: de los más relevantes se mencionan: a) de corte psicológico cognitivo, son los estudios Greeno (1978) sobre las relaciones entre operaciones aritméticas, los de Raymond Duval (1999) sobre la demostración geométrica formal y la experiencia con mapas conceptuales en temas de matemáticas de Francisco José Anillo Ramos (2004); y, b) usando un enfoque sistémico y pedagógico, es el de la “*Organización lógica de las experiencias de aprendizaje*”, de I. B. Morgannov (1966) y Bertha Heredia (1976); esta última, investigadora de la Facultad de Medicina, Veterinaria y Zootecnia de la UNAM-México.

3.1 Las investigaciones cognitivas sobre Articulación de Saberes Matemáticos

En la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática, se aprecia una fuerte presión de la perspectiva psicológica en el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje matemático. El citado predominio se manifiesta viendo la vitalidad del Grupo Internacional PME (Psychology of Mathematics Education /Psicología de la Educación Matemática).

Entre otros, uno de los objetivos principales de este colectivo abierto de investigadores, es:

...”Fomentar una comprensión más profunda y correcta de los aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus implicaciones”... (Godino, 2004)^[9].

Podría surgir la interrogante sobre cuáles son las cuestiones esenciales en la enseñanza de las matemáticas para las cuales una aproximación psicológica puede ser apropiada; a este respecto, Vergnaud (1988) cita que “*el análisis de la conducta de los estudiantes, de sus representaciones y de los fenómenos inconscientes que tienen lugar en sus mentes*”. Esto lleva a hablar de las vertientes de investigación actuales sobre el tema cognitivo, de las cuales se menciona una de las más prolíficas actualmente: la Teoría del Procesamiento de la Información (Godino, 2004) ^[9]. Este enfoque de la ciencia cognitiva, es de fuerte impacto en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático, como se pone de manifiesto en el libro de Davis (1984). Según Schoenfeld (1987) una hipótesis básica subyacente de los trabajos en ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero que tales estructuras pueden ser

comprendidas y que esta comprensión ayudará a conocer mejor los modos en los que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar (Godino, 2004)^[9]. Resnick y Ford (1990), mencionan al respecto:

“Los investigadores de esta teoría (Teoría del Procesamiento de la Información), están desarrollando ciertos modelos, llamados modelos de memoria semántica, buscando explicar algunas de las características del pensamiento humano que advirtieron algunos de los primeros teóricos. Se está intentando hacerlo en términos de modelos expresados de forma rigurosa, y que tienen ciertas características: 1) Se adaptan específicamente al contenido del campo del conocimiento que se estudia. 2) Pueden incluir a la vez las reglas de acción y relaciones conceptuales dentro de las mismas redes. Debido a estas características, los modelos de memoria semántica permiten la asociación teórica de los procedimientos de cálculo y de los principios que subyacen en dichos procedimientos. Parece de momento que gran parte de lo que llamamos “estructura” en el pensamiento matemático se puede explicar en términos de las redes semánticas” (Resnick y Ford, 1990, p. 238).

Los modelos de memoria semántica tratan de representar cómo se almacena y se utiliza el conocimiento con significado, es decir, semántico. Los tipos básicos de modelos de memoria semántica son:

- *Modelos de red*, que se basan en la idea de que la memoria está constituida por elementos y las asociaciones entre ellos; donde a) las relaciones pueden ser de varios tipos; b) las unidades son conceptos significativos; y c) las teorías pueden ser verificadas. Estos modelos son los más antiguos y los más conocidos.
- *Modelos de rasgo*, que están basados en la idea de que la memoria está constituida por rasgos que pertenecen a conjuntos, los que pertenecen a conjuntos mayores o superconjuntos y así sucesivamente (Mayer, 1986, pp. 280,281).

Las siguientes investigaciones de corte cognitivo, están basadas principalmente en los modelos de red de la memoria semántica.

3.1.1 Las investigaciones de Greeno sobre operaciones aritméticas

Un primer ejemplo sobre este tipo de investigaciones, se puede ver en los estudios de Greeno (1978) de las relaciones entre multiplicación y división. Greeno pone de manifiesto, por medio de los modelos de memoria semántica, la falta de comprensión

de la relación inversa que existe entre ambas operaciones (ver figura 3.1). Se representa la estructura de conocimiento de un sujeto que conoce la multiplicación y la división, pero que no comprende su relación inversa. Las estructuras de multiplicación y de división no están unidas; evidentemente se puede observar lo que podríamos llamar una Desarticulación de Saberes (entendiéndose ésta como el proceso inverso a la articulación).

Para comprender que la multiplicación y la división son operaciones inversas la una de la otra, hay que reconocer que existe una relación especial entre las cantidades objeto y las cantidades resultado de ambas operaciones. Si eso se comprende, las estructuras de conocimiento de la multiplicación y de la división están unidas, y la estructura total se simplifica con dicha unión (ver figura 3.2). Se puede argumentar a priori que la unión y simplificación de las estructuras recuerda la idea de la Articulación de Saberes (Resnick y Ford, 1990, p. 233 a 280).

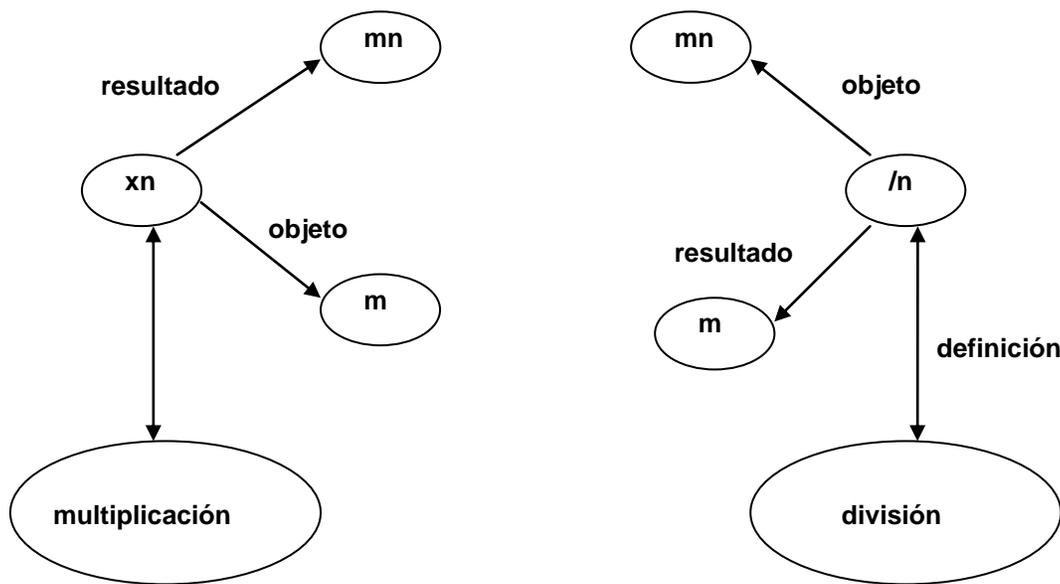


Figura 3.1 Posibles estructuras de conocimiento desvinculadas, sobre la multiplicación y la división

3.1.2. La experiencia de trabajo con mapas conceptuales en Matemáticas, de Francisco José Anillo Ramos

El uso de mapas conceptuales en Matemáticas, permite mostrar otra faceta de aspectos de la articulación. Muestra de ello es la experiencia del trabajo que a continuación se presenta.

La experiencia se realizó en España con el Curso de Enseñanzas Complementarias (CEA-A) de una escuela de Formación Profesional.

Inicialmente, se seleccionó el tema matemático sobre el concepto de los triángulos (ver figura 3.3); a continuación, se les explicó a los estudiantes la técnica de los mapas conceptuales y se les insistió en que eligieran los conceptos, palabras-enlace y la jerarquización. Los alumnos elaboraron individualmente su mapa conceptual sobre el tema de los triángulos.

En la clase del día siguiente, se les organizó en cuatro grupos de cinco alumnos y se les pidió que realizaran de forma consensuada el mapa conceptual de cada grupo. Cada grupo generó un mapa distinto. Se le pidió a cada grupo que explicase en la pizarra y mostrando sus mapas, el tema de los triángulos y el porqué de la elaboración de dicho mapa. Esta exposición fue bastante enriquecedora sobre la técnica de elaboración de los mapas conceptuales para los estudiantes, además de que reflejaba la forma progresiva en que los alumnos aprenden el tema en cuestión (Ontoria et al., 2004, pp. 131 a 133).

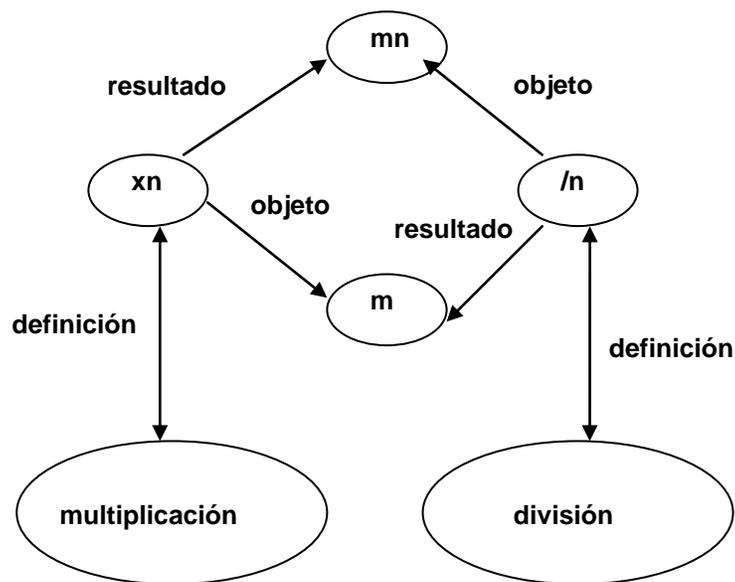


Figura 3.2 Estructura del conocimiento que pone de manifiesto la comprensión de la relación inversa entre la multiplicación y la división

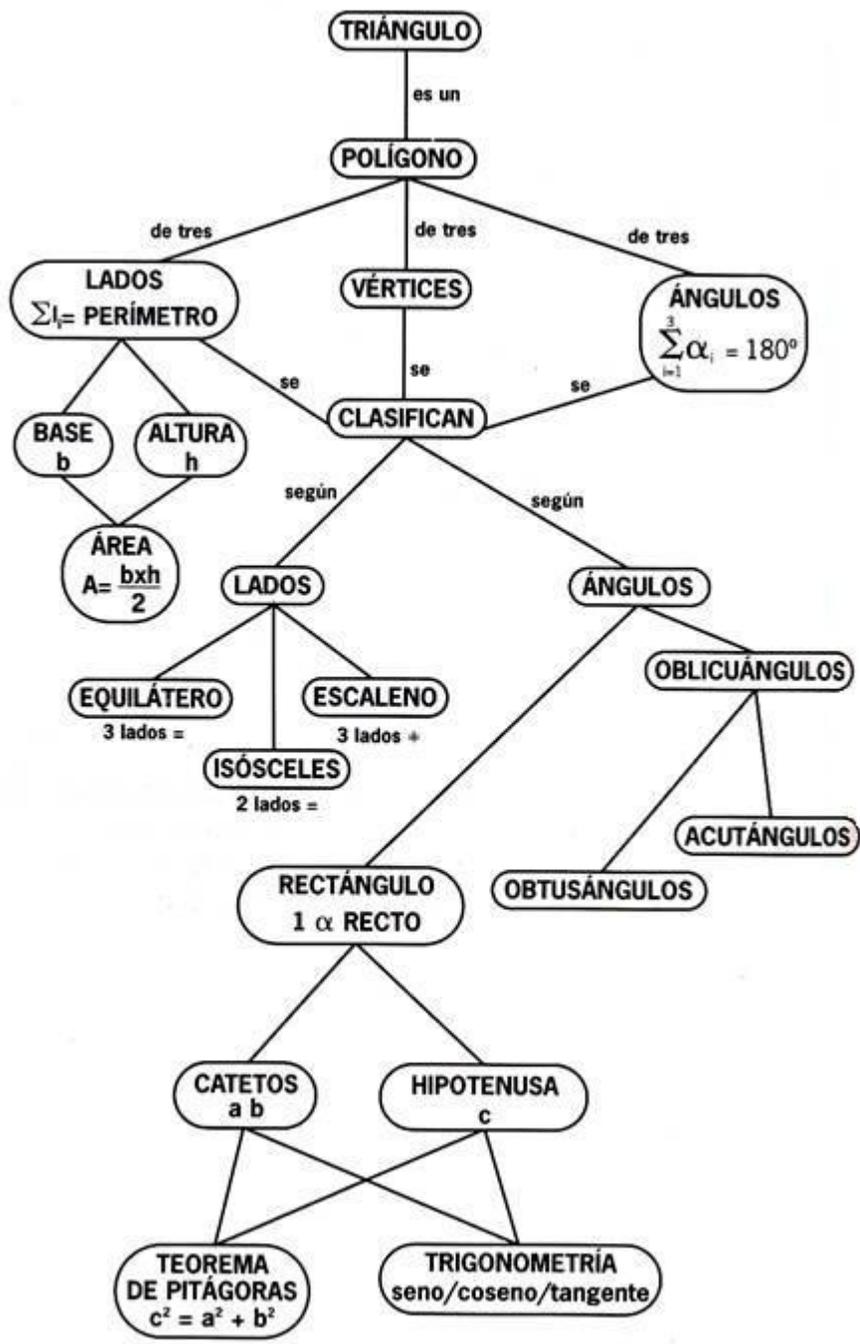


Figura 3.3 Mapa conceptual sobre el tema de los triángulos

3.1.3 La investigación de Raymond Duval sobre demostraciones geométricas formales

Una investigación más reciente, es la presentada por Raymond Duval (1999) en su libro "**Semiósis** y pensamiento humano" (Páginas 227 - 242), donde aborda el tipo de razonamiento científico llamado por Aristóteles como demostración, entendiéndose éste como un recorrido discursivo que cumple dos condiciones: ser un razonamiento válido y basarse en proposiciones verdaderas.

Duval presenta **grafos proposicionales** emanados de los textos de demostración de ciertos teoremas formales (ver figura 3.4 y 3.5). Cada flecha marca un paso de razonamiento.

El estudio de Duval termina concluyendo que, es cognitivamente esencial la posibilidad de una articulación entre los dos registros (algebraico y gráfico). Esto no quiere decir que en caso de congruencia, la demostración sea sólo la lectura del dibujo, y eso por razones intrínsecas al registro de las figuras. En efecto, ninguna figura puede representar "las órdenes que constituyen las operaciones sino solo el resultado de su efectuación": representar las operaciones "implica un dibujo o una escritura que tenga las propiedades de un lenguaje" (Bresson, 1987, p. 939).

3.2 Las investigaciones con enfoque sistémico y pedagógico, sobre Articulación de Saberes Matemáticos

Aristóteles enunció de la siguiente manera el problema básico de los sistemas: "*El todo es algo más que la suma de sus partes*". La ciencia consideró durante siglos al **enfoque analítico** como el método científico, es decir, como el único método científico. A este respecto, Descartes, en su "Discurso del método", afirma: "*Es necesario descomponer cada problema en tantos elementos simples como sea posible*". Algo semejante hizo Galileo al fundamentar su trabajo de experimentación. Debido a que con el método científico se obtuvo gran número de descubrimientos y avances por más de 300 años, pocos investigadores refutaron la identificación del método analítico con el científico, pues (incluso ahora) rinde grandes beneficios.

Sin embargo, algunos investigadores, sobre todo del campo de la biología, señalaban que "*el todo tienen algo que no se encuentra en el conjunto de sus partes*", con lo cual rescataban la afirmación aristotélica de que "*el todo es algo más que la suma de sus partes*". Por 1930, Ludwig von Bertalanffy, R. A. Fisher y otros autores se percataron de que la "ciencia de las partes" habría de ser complementada por la "ciencia de las totalidades", y la desarrollaron con leyes, métodos, lógica y matemáticas **atingentes**. La perspectiva sistémica permite estudiar un fenómeno en toda su complejidad. No es preciso que se manipule una variable cada vez, sino que se pueden tener en cuenta varias simultáneamente. Esta perspectiva es la adecuada para tratar fenómenos "reales" y complejos, como lo son los sociales, los educativos, etc. Esta perspectiva tiene en cuenta a las partes, pero no en forma aislada, sino a partir de la estructura del todo. No está en contra de la metodología analítica

conocida. La perspectiva sistemática incluye a la analítica como uno de sus componentes. Interesan las partes de un todo, pero también la coordinación de las partes en diferentes niveles de organización (sistemas) (Huerta Ibarra, 2003, p.22).

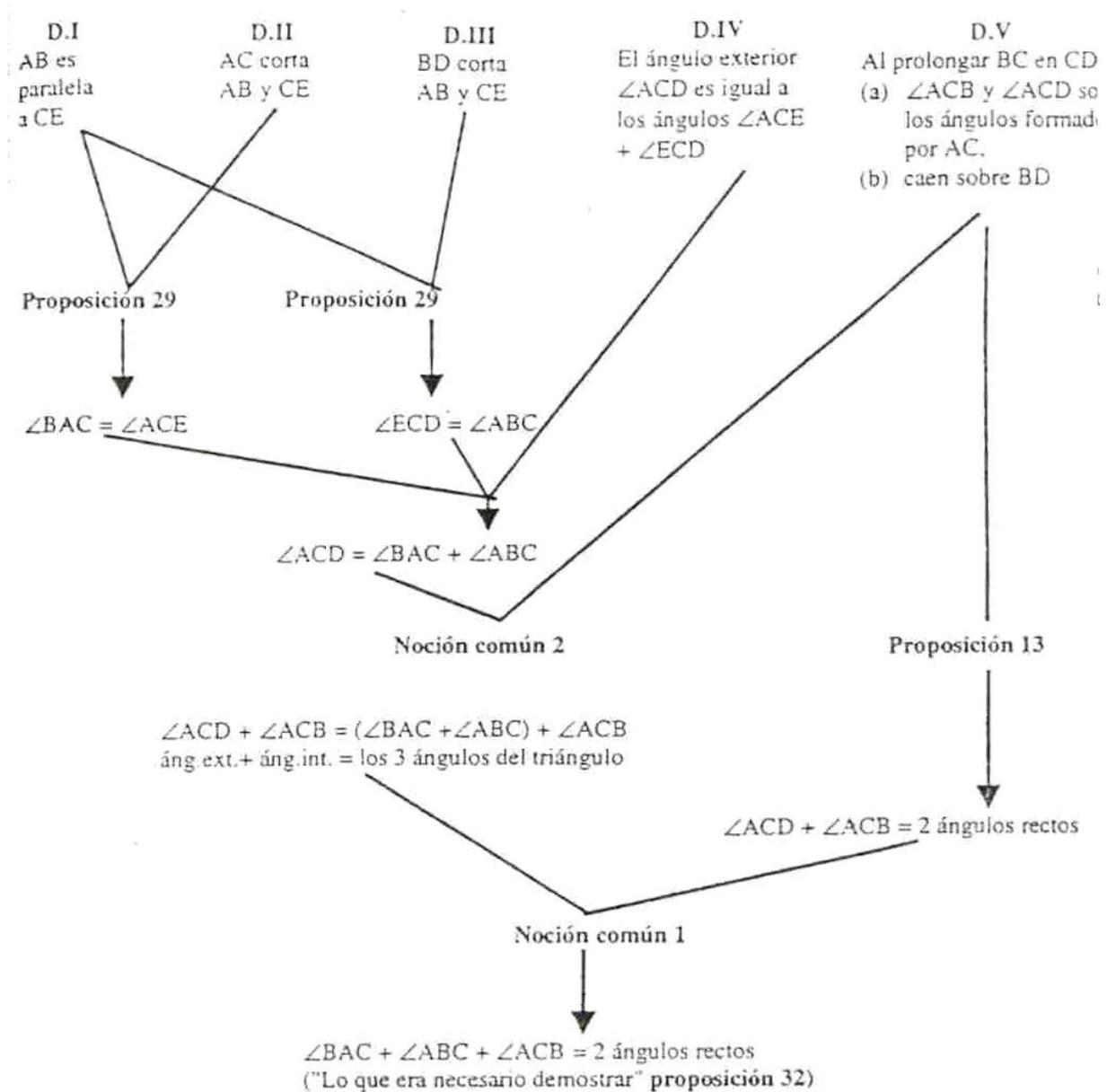


Figura 3.4 Grafo proposicional de la demostración del teorema "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos" (Euclides, 1990, p. 256).

3.2.1 La Organización lógica de las experiencias de aprendizaje de la ANUIES

A través del Programa Nacional de Formación de Profesores, la ANUIES (Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior), publicó un núcleo

articulado de trabajos con los que se pretendió sentar las bases para la unificación y real sistematización del proceso de enseñanza-aprendizaje, ofreciendo una alternativa actualizada para el trabajo en las aulas (Huerta Ibarra, 2003, p.6).

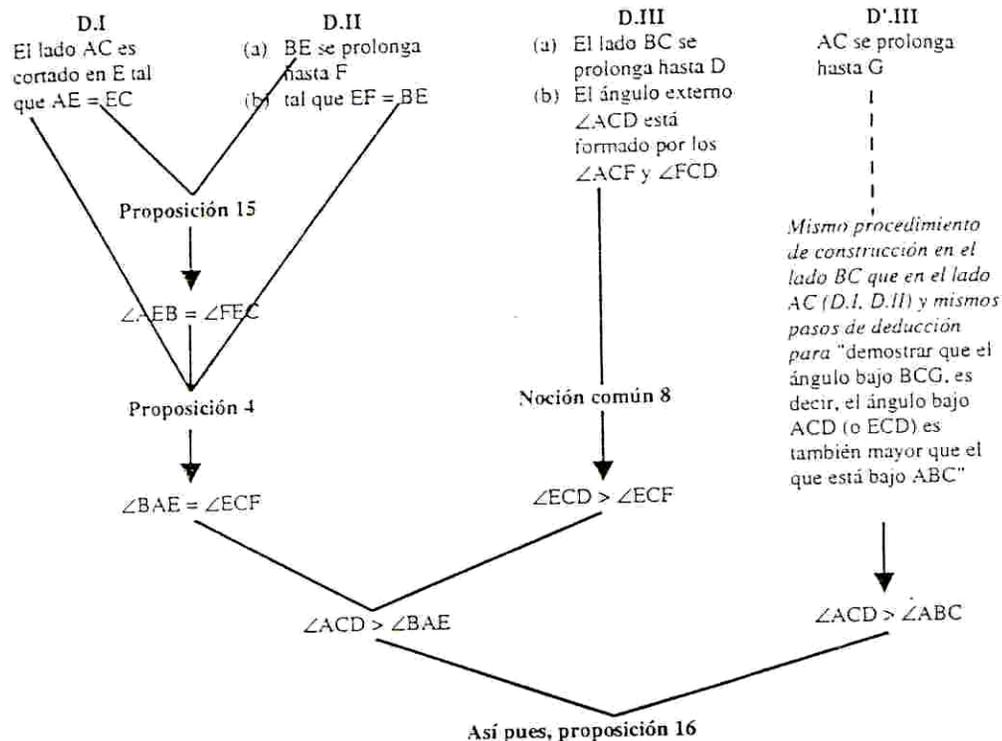


Figura 3.5 Grafo proposicional de la proposición 16 de Euclides: "En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos" (Euclides, 1990, p. 226-228).

Para José Huerta Ibarra (2003), la sistematización de la enseñanza no es, ni pretende ser, la panacea que dé solución a todos los problemas que la enseñanza implica. Sin embargo, su enfoque experimental permite la aproximación sucesiva y el proponer soluciones para los problemas que la enseñanza plantea. (Huerta Ibarra, 2003, p.15).

La Organización lógica de las experiencias de aprendizaje, persigue los propósitos de articular y estructurar los componentes del contenido de las asignaturas, elaborando la secuencia pedagógica de éstos y poner en ejecución los episodios didácticos que integren las experiencias de aprendizaje adecuados a los objetivos propuestos en el programa de los cursos (Huerta Ibarra, 2003, p.16).

Para los psicólogos de la escuela de la Gestalt (teoría de las configuraciones), el aprendizaje es la captación súbita de significaciones intrínsecas; es decir, partían de la premisa de que el estudiante podía conocer (estar consciente) de la existencia de partes aparentemente aisladas a las que, mediante una operación mental, se les articulaba en una estructura, adquiriendo una significación en conjunto; es aquí

donde aparece la perspectiva sistémica, en la cual es esencial organizar las partes en una estructura que forme el todo (Huerta Ibarra, 2003, p.21).

Las propiedades de organización del conocimiento son de notable importancia para el aprendizaje humano. La organización del contenido determina en la mayoría de los casos la claridad, comprensión, generalidad, implicación, cohesión, etc.; propiedades todas que dan significación al contenido. Cuanto más sólidamente esté articulado el contenido, mayores serán las facilidades para su asimilación y retención (Huerta Ibarra, 2003, p.22).

En el conocimiento organizado para la enseñanza, se atiende el hecho de que deben existir reglas, normas o principios que regulen la organización del conocimiento. Los conocimientos alcanzarán el rango de disciplina si satisfacen las siguientes características:

- a) Articulación (análisis)
- b) Estructuración (síntesis)
- c) Dinamismo (desarrollo)

a) Articulación (análisis). La primera forma de organización del conocimiento es a través de conceptos, categorías o clases, en los cuales se agrupan elementos del conocimiento en función de ciertas características comunes. Tales características vienen a ser los “atributos-criterio” o de identificación de lo se conceptualiza (Huerta Ibarra, 2003, p.23). Esto se lleva a cabo mediante el proceso de abstracción de las características mencionadas, con lo cual es factible sistematizar todo un campo de observación, experimentación e hipótesis.

El concepto es la unidad básica de articulación de las estructuras cognoscitivas. Toda disciplina es un sistema conceptual que organiza el campo de conocimiento pertinente (Huerta Ibarra, 2003, p.23, 24).

b) Estructuración (síntesis). Estructura es el conjunto de relaciones existentes entre los elementos de un todo. Los conocimientos de una disciplina no son un conjunto de conceptos independientes entre sí, puesto que forman una red conceptual establecida por las relaciones de interdependencia de los conceptos. El significado de cada concepto está delimitado, precisado, por los conceptos con que se relaciona, por su lugar en la red conceptual de la estructura cognoscitiva de la disciplina (Huerta Ibarra, 2003, p.24).

c) Dinamismo (desarrollo). Dado que el conocimiento es un procedimiento de aproximación, de enfoque de la realidad para describirla, explicarla y controlarla, se reconoce que no es definitivo y que se le puede modificar, perfeccionar, hacer evolucionar o transformar por completo, siendo esto el principio de desarrollo de las disciplinas científicas.

Dado que una disciplina científica es el conocimiento organizado para la enseñanza y el aprendizaje, tal organización permite llegar a las estructuras que deseamos que el estudiante aprenda. El discípulo, al llegar a clase posee una estructura cognoscitiva con la que sistematiza su conocimiento sobre el mundo que le rodea. El profesor enseñará al estudiante las estructuras cognoscitivas de las disciplinas; el cómo éstas son aprendidas, el individuo las determina por sí mismo cómo asimilarlas. Es decir, como el alumno es el que aprende, sólo él puede asimilar las nuevas estructuras e integrarlas a las que ya posee. El efecto acumulativo del aprendizaje se va manifestando en la mayor complejidad que en torno a un mismo tema adquiere la estructura cognoscitiva. Se ha dicho antes que, etimológicamente hablando, disciplina significa conocimiento organizado para la enseñanza, es decir, lo que se enseña y la forma de organizarlo. La forma de organización que compete a la perspectiva de la sistematización de la enseñanza se logra a través de secuencias pedagógicas. La secuencia pedagógica es el conjunto de episodios didácticos necesarios para lograr un objetivo específico de aprendizaje. El episodio didáctico es la unidad elemental de las experiencias de aprendizaje, que se caracteriza por abarcar una interacción del estudiante con su medio, interacción pertinente al logro del objetivo propuesto (Huerta Ibarra, 2003, pp. 24,25)

3.2.1.1 Construcción de secuencias pedagógicas: Técnica de Morgannov-Heredia

Cada escuela psicológica destaca diferentes criterios para elaborar y organizar las experiencias pedagógicas. Tales criterios derivan de lo que cada escuela considere útil para la transferencia; es decir, no interesa tanto que el estudiante aprende algo para pasar sus exámenes, sino que lo aprenda para resolver problemas reales con base en lo aprendido (Huerta Ibarra, 2003, p. 25). La transferencia es la adquisición y retención del nuevo conocimiento, la cual depende del proceso de asimilación y organización del propio conocimiento (Huerta Ibarra, 2003, p. 26).

Para articular y estructurar elementos de un contenido que permitan determinar ulteriormente secuencias pedagógicas óptimas que consideren el fenómeno de la transferencia, se presentan conjuntamente la técnica de I. B. Morgannov, que se presenta en el artículo “La utilización de gráficas en la elaboración de programas”, y la de Bertha Heredia, en su artículo “La articulación y estructuración de la enseñanza”. La técnica conjunta de Morgannov-Heredia, permite determinar la estructura de un contenido, lo cual, aunado a las estructuras elementales conceptuales, cumple la función organizadora entre las **estructuras cognoscitivas** iniciales y las existentes después de las **experiencias de aprendizaje**. Se ha dado en llamar a esto “Organización lógica del contenido u Organización lógica de las experiencias de aprendizaje”. La técnica consiste en elaborar una tabla de doble entrada y una gráfica, en las cuales se representa, de diversa manera, la dependencia entre los elementos conceptuales (Huerta Ibarra, 2003, pp. 27,28).

Para el desarrollo práctico de la Técnica de Morgannov-Heredia, es necesaria la organización del conocimiento para la enseñanza en dos etapas o fases, las cuales son parte de las características del conocimiento, cuando éste alcanza el rango de disciplina:

- a) Articulación
- b) Estructuración

a) Etapa de articulación

Cuando en un contenido intervienen muchos elementos (saberes), es muy difícil proceder a establecer las relaciones que entre ellos existen. Para hacerlo con mayor facilidad, conviene utilizar tablas de doble entrada (ver figura 3.6), donde se representan los conceptos a articular:

	1	2	3	4	5
1	0				
2		0			
3			0		
4				0	
5					0

Figura 3.6 Ejemplo de tabla de doble entrada

La intersección de una columna y un renglón forma una celdilla o casilla, en la que se registrará la interdependencia entre los elementos. Para hacerlo se formula la siguiente pregunta: el elemento de la columna ¿tiene como requisito al elemento del renglón?. Cuando la respuesta es sí, se anota un 1 en la casilla correspondiente. Cuando la respuesta es no, se anota un 0. Cuando se ha establecido la dependencia de cada vértice con todos los vértices, se ha efectuado la articulación.

Al proceder como se ha indicado, se ha llevado a cabo un procedimiento analítico, pues se tomó un vértice y se le comparó con cada uno de los restantes. No se ha tomado el problema en su totalidad, sino que se abordó parte por parte hasta abarcar el todo (es decir, celdilla por celdilla hasta llenar la tabla) (ver figura 3.7). Sin embargo, al terminar la articulación ya se tienen los elementos necesarios (aunque no suficientes) para proceder a determinar la estructuración de los elementos (objetivos, temas, materias, etc.); es decir, la articulación conduce a la estructuración.

Las razones más frecuentes para considerar a un elemento requisito de otro son, de acuerdo con Heredia (1976):

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Figura 3.7 Tabla de doble entrada completa

- Que la comprensión de un elemento sea requisito para la comprensión de otro. Para determinar la relación antecedentes-consecuente entre los elementos, conviene apoyarse en la experiencia de los profesores y en los resultados de las investigaciones sobre la estructura jerárquica entre los diversos elementos.
- El momento en que los estudiantes deberán aplicar los conocimientos adquiridos.
- La oportunidad, que hace que ciertos conocimientos sean más familiares y motivadores en un momento dado.

En conclusión, la articulación consiste en establecer la dependencia de cada vértice con todos los vértices. Esto se da:

- Cuando se han llenado las celdillas de la columna y renglón de un vértice, se dice que dicho vértice ha quedado articulado.
- Sólo se pueden articular vértices que se consideren del mismo nivel. (En otras palabras, no se pueden articular objetivos y temas, sino sólo objetivos con objetivos o temas con temas) (Huerta Ibarra, 2003, pp. 37, 38, 40, 41).

b) Etapa de estructuración

Para Bertha Hereida (1976), estructurar es: *"representar las relaciones existentes entre los elementos de un todo. Podríamos decir que el proceso seguido en el caso de la articulación es el de análisis, en tanto que en la estructuración se trata de un proceso de síntesis"* (Heredia, 1976).

De hecho, se puede considerar que la tabla (ver figura 3.8) presenta la estructura de varios elementos; sin embargo, cuando se trata de un número regular de vértices no es fácil visualizar la estructura, por lo que es preferible graficarla con vértices y ramas (con ayuda de las **gráficas jerárquicas**). Es decir, se utiliza la tabla de doble entrada para articular y ahora, mediante su análisis, se dibujará la gráfica. Para ello, se siguen las siguientes consideraciones para la representación de los vértices:

- Si en la columna sólo aparecen ceros, esto quiere decir que no requiere de ningún vértice. Si además es requisito de otros vértices (es decir, tiene por lo menos un uno en su renglón), se trata de un vértice fuente.

- Si sólo hay ceros en el renglón, quiere decir que no es requisito de ningún vértice. Si además tiene como requisito a otros vértices (es decir, tiene por lo menos un uno en su columna), se trata de un vértice cima.
- Si tanto en la columna como en el renglón presenta ceros, quiere decir que no es requisito ni tiene requisitos; por ende, se trata de un vértice aislado.
- Si tiene por lo menos un uno tanto en la columna como en el renglón quiere decir que tiene requisitos y que a su vez es requisito de otros; por tanto, estamos ante un vértice intermedio.

Para elaborar la estructuración se siguen los siguientes pasos:

1) Eliminar vértices aislados. Se puede hacer esto de dos maneras:

- Relacionando el vértice con alguno o algunos de los otros; es decir, convirtiéndolo en vértice fuente, cima o intermedio
- Retirándolo de la tabla, por no existir la posibilidad de relacionarlo. Un vértice aislado significa la presencia de contenido impertinente en un plan de estudios o en una materia. (Usualmente, esto la convierte en una materia, tema u objetivo “barco”)

2) Eliminar de la tabla los vértices fuente (tanto de renglón como de columna)

3) Registrar en hoja aparte los vértices eliminados

4) Identificar los “vértices fuente” del siguiente nivel

5) Eliminarlos de la tabla

6) Registrarlos sobre los vértices anteriores

7) Consultar en la tabla matriz cuáles de los vértices del nuevo nivel tienen como requisito a los vértices del nivel inmediato inferior

8) Cuando lo sean, dibujar las ramas correspondientes

9) Preguntarse si los vértices del nivel superior eran los últimos “vértices con ceros en la columna”:

- Si no, pasar a (4) y repetir el procedimiento
- Si son los últimos, se termina el procedimiento

Aplicando el citado procedimiento, se arrojan los siguientes resultados: se parte de una tabla de doble entrada articulada, anteriormente elaborada (ver figura 3.8).

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Figura 3.8 Tabla de doble entrada articulada

Como no hay vértices aislados, eliminamos en la gráfica matriz (ver figura 3.8) el vértice fuente. Esto da origen a la figura 3.9, que es igual a la figura 3.10.

	1	2	3	4	5
(1	0	1	1	1	1)
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Figura 3.9

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Figura 3.10

En una hoja aparte se registra el vértice eliminado (ver figura 3.11). Como se puede apreciar, el hecho de eliminar vértices reduce la tabla matriz y da origen a nuevos “vértices con ceros en la columna”.



Figura 3.11

Por último, y como lo marca el procedimiento antes mencionado, se muestra la solución completa (ver figura 3.12 a 3.16) (Huerta Ibarra, 2003, pp. 43 a 47).

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Figura 3.12

	2	3	4	5
2	0	1	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1
5	0	0	0	0

Figura 3.13.

	3	4	5
3	0	0	1
4	0	0	1
5	0	0	0

Figura 3.14

	5
5	0

Figura 3.15

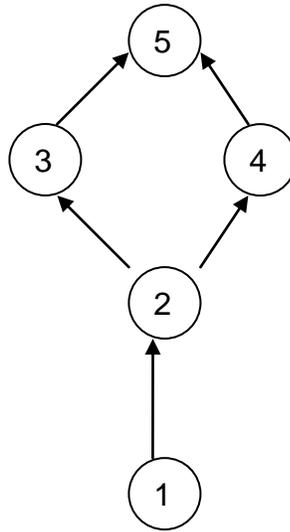


Figura 3.16 Gráfica que representa la etapa de estructuración

Se puede concluir, que la noción de la articulación se encuentra en cierta medida, presente es los distintos estudios presentados, en donde por lo regular se abordan algunos aspectos sobre la articulación como la identificación de conceptos, la búsqueda de su estructuración, por mencionar los más relevantes; a pesar de ello, no se explicitan en muchos casos, aspectos también relevantes como son los procesos de articular. Se habla muy poco de los beneficios de ganancia de conocimiento que se alcanza con llevar a cabo el acto de articular, la multitud de formas de articular los mismos componentes, la especificación de un objetivo específico para articular las partes, etc., entre otros aspectos relevantes de la articulación. Al parecer, la línea de investigación sobre articulación de saberes apenas comienza su desarrollo.

Capítulo IV

Diseño del test de estimación de articulación

Como ya se ha comentado anteriormente, el fenómeno de Articulación de Saberes Matemáticos se lleva a cabo a través de un proceso intelectual dinámico por parte del sujeto que lleva a cabo el acto de articular. Dicho proceso se compone de cuatro niveles en los que se evoluciona hacia la articulación. En el siguiente apartado, se llevará a cabo una forma de estimar en que nivel de articulación se encuentra un grupo homogéneo de estudiantes universitarios, que han tomado recientemente un curso de Álgebra Lineal, en donde se ha abordado el tema de los sistemas de ecuaciones lineales. Como herramienta de estimación, se ha diseñado un test, que versa específicamente sobre el tema de las ecuaciones lineales y los sistemas que éstos forman.

Para desarrollar un test de medida que determine el nivel de Articulación de Saberes Matemáticos en los estudiantes, se necesitan dos componentes elementales para desarrollarlo: a) el método o procedimiento para organizar el tema y sus componentes, que permitan el análisis del nivel de articulación en el que se encuentran los estudiantes encuestados; y b) el tema específico a tratar, con algunos de sus conceptos, operaciones, procedimientos y algoritmos matemáticos que este comprende. El método que se llevará a cabo y que permita organizar los elementos conceptuales disponibles, se basa en poner juntos un cierto número de elementos conceptuales que definen los conceptos y saberes pertenecientes a los sistemas lineales y otros que nada tienen que ver con éstos, con el fin de remarcar las diferencias evidentes, además de poner diagramas que le permitan al estudiante entrevistado, el poder definir las estructuras y los sistemas conceptuales, vinculados con los sistemas de ecuaciones lineales. Se abordaran algunos de los aspectos generales de los sistemas de ecuaciones lineales, para después diseñar representaciones gráficas de los saberes de los sistemas lineales y que permitan definir la estructura del test, que se aplicará a un grupo de 26 estudiantes que presentan características homogéneas (pertenecen al mismo salón de clase y fueron guiados todo el curso por el mismo profesor).

4.1 Saberes matemáticos presentes en el test de estimación de articulación

Se abordan dos aspectos de los sistemas de ecuaciones lineales dentro del test, para aplicar a los estudiantes:

- La definición de las ecuaciones lineales
- La definición de los sistemas de ecuaciones lineales

La estructura básica del test ésta diseñada en base a la evolución conceptual de las etapas del proceso de articular, y que pretende medir el grado de articulación existente sobre el tema de sistema de ecuaciones lineales, en un grupo homogéneo

de 26 estudiantes universitarios, que hayan tomado recientemente un curso sobre Álgebra Lineal.

4.2 Las ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales juegan un papel importante, no sólo en las matemáticas, sino en muchos otros campos en que se emplean éstas. Ya sea que se estudie las **deformaciones elásticas** o los circuitos eléctricos, la vibración de las alas de un avión o el cálculo de errores por el **método de mínimos cuadrados**, en alguna etapa de los cálculos se encontrará un sistema de ecuaciones lineales (Cohn, 1968, p.1).

4.2.1 Definición de ecuación lineal

El tipo de ecuación

$$ax + b = 0, \text{ donde } a, b \in R, a \neq 0$$

se le llama una ecuación lineal en x (Swokowski, 1975, pp. 90). La más simple de las ecuaciones lineales, es con una incógnita (Cohn, 1968, pp.1)

$$ax = k$$

Una recta en un plano cartesiano xy puede representarse algebraicamente por una ecuación de la forma:

$$a_1x + a_2y = b$$

Una ecuación de este tipo se denomina ecuación lineal en las variables x y y . De manera más general, una ecuación lineal en las n variables x_1, x_2, \dots, x_n se define como una ecuación que se puede expresar en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

donde $a_i, b \in R$ son constantes reales. Los escalares a_i son los coeficientes de los x_i respectivamente, y b es el término constante o simplemente la constante de la ecuación. Las variables en una ecuación lineal algunas veces se denominan incógnitas (Lipschutz, 1984, pp. 18).

Las ecuaciones siguientes son lineales en las correspondientes variables:

$$x + 3y = 7$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

Hay que observar que los exponentes de las variables en una ecuación lineal son todos iguales a uno (Antón, 2002, pp. 21, 22).

4.2.2 Representación esquemática de conceptos relacionados con la ecuación lineal

Los componentes conceptuales de la ecuación lineal (Swokowski, 1975, p. 72 y 73), (Baldor, 1992, pp. 5, 6) y (Thompson, 1975, p.12) se podría representar por medio del siguiente grafo (Figura 4.1). Hay que aclarar que éste último presenta una configuración propia del Nivel 0 a 1 de articulación, debido a que se trata de un concepto que se forma de sus preconceptos (términos, representaciones y símbolos matemáticos).

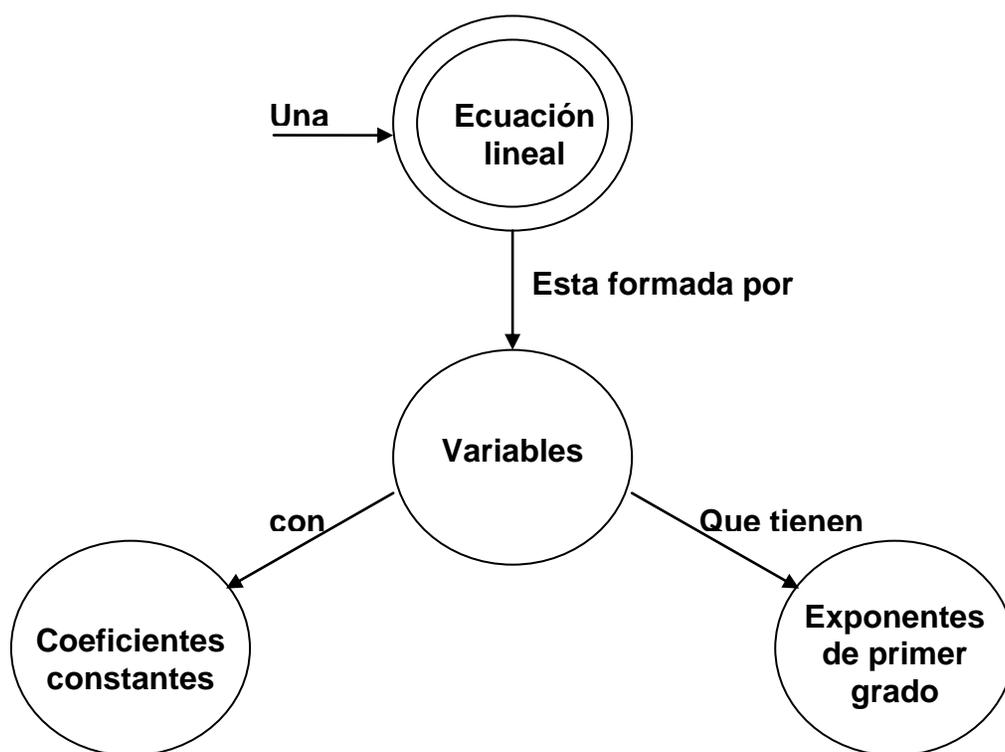


Figura 4.1 Representación esquemática del concepto de ecuación lineal

4.3 Los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales surgen de la búsqueda de soluciones de diversos problemas planteados en situaciones reales.

4.3.1 Definición de un sistema de ecuaciones lineales

En forma general, un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2, \dots, x_n se denomina sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal. En forma general, un sistema de m ecuaciones lineales en n variables se puede escribir como

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables y las letras a_{ij} y b_i con subíndices que denotan constantes. Los subíndices dobles en los coeficientes de las incógnitas constituyen un mecanismo útil que se utiliza para especificar la ubicación del coeficiente en el sistema. El primer subíndice en el coeficiente a_{ij} indica el número de la ecuación en que aparece el coeficiente, y el segundo subíndice indica a qué variable multiplica. Así, a_{12} está en la primera ecuación y multiplica a la variable x_2 (Antón, 2002, pp. 23, 24).

4.3.2 Representación esquemática de conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales

Los componentes conceptuales de un sistema de ecuaciones lineales se pueden representar con el siguiente gráfico (Figura 4.2). Este aborda los niveles de articulación del 1 al 3.

4.4 El test de estimación de articulación

El siguiente test consta de dos secciones: la primera habla del concepto de ecuación lineal, constituyente principal de los sistemas lineales, en el cual se aborda aspectos del nivel 0 al 1 de la articulación (de los preconceptos al concepto). Se utiliza un estilo de test basado en seleccionar términos correctos de los incorrectos. Además de esto, se utilizan grafos conceptuales. La segunda parte del test, aborda la definición de los sistemas de ecuaciones lineales, abordándose aspectos del nivel 1 al 3 de articulación (del conglomerado de los conceptos al sistema conceptual). Se utilizan las mismas técnicas para la explorar el grado de articulación que en la primera parte.

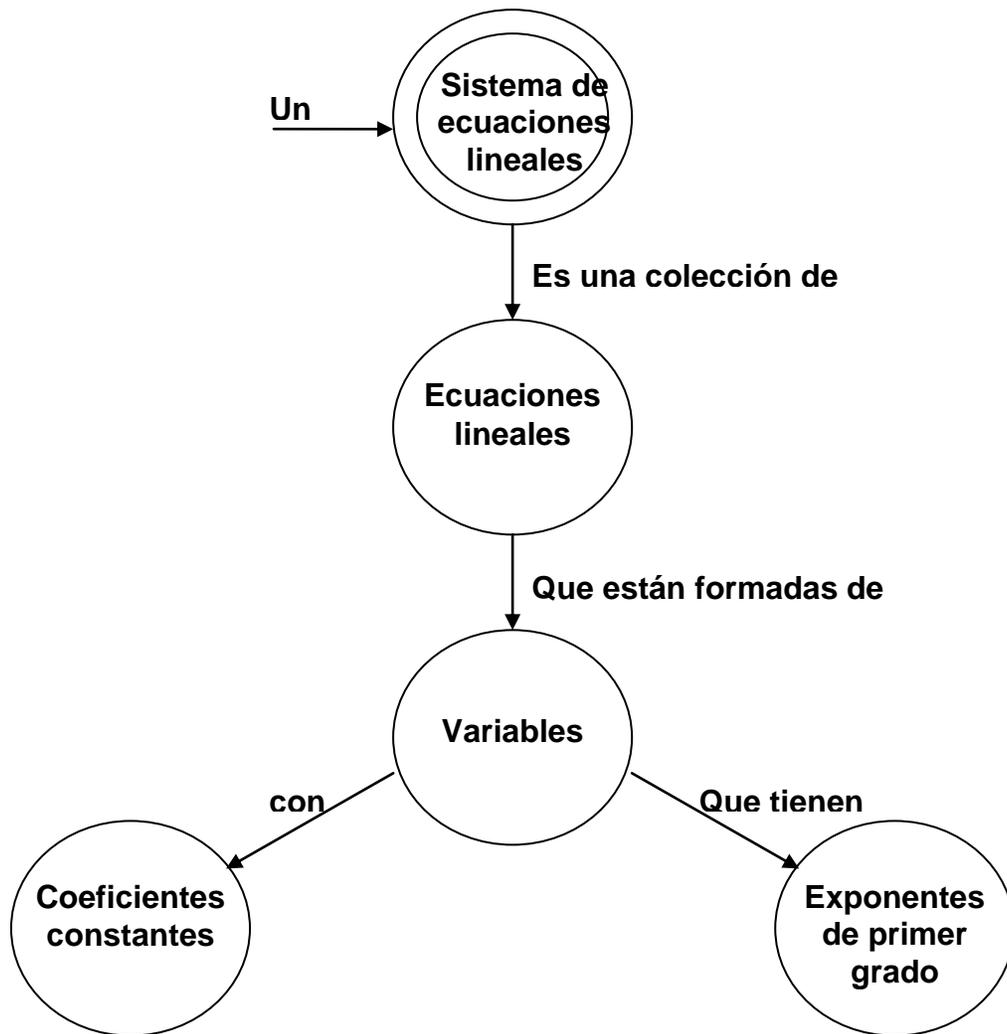


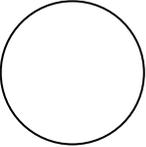
Figura 4.2 Representación esquemática del concepto de sistema de ecuaciones lineales

A continuación se muestra el test diseñado:

Parte 1.1

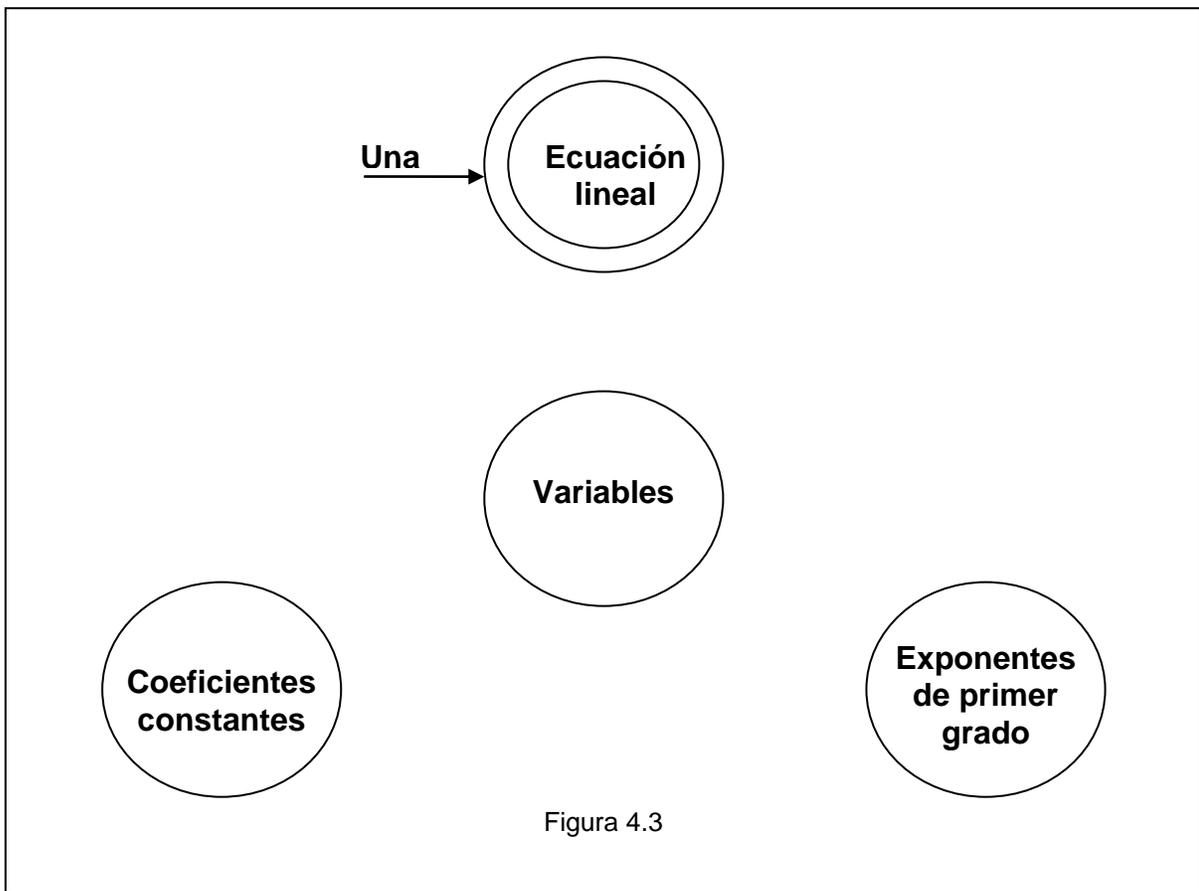
Identifique las condiciones que definen una ecuación lineal en las variables x y y

	Si	No
Los exponentes de algún término pueden ser negativos		
Los coeficientes de x y y son constantes		

La representación geométrica de una ecuación lineal es		
Después de simplificar al máximo, puede aparecer un término de la forma e^x		
La ecuación $5x + \sqrt{2}y = b$ es lineal en x y y ; b es constante		

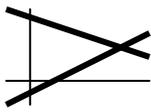
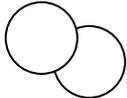
Parte 1.2

El concepto de ecuación lineal se vincula con diversos conceptos. Especifique las relaciones entre ellos dibujando flechas y anote frases o palabras que expliquen los vínculos conceptuales que existen entre los conceptos (ver figura 4.3).



Parte 2.1

Identifique las condiciones que definen un sistema de ecuaciones lineales, en las variables x y y

	Si	No
Es una colección de ecuaciones lineales		
Los coeficientes de x y y son constantes		
Los términos independientes pueden ser variables		
La representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales es		
Después de simplificar al máximo, puede aparecer un término de la forma e^x		
Las ecuaciones $a_{ij}x + a_{ij}y = b_i$ son lineales en x y y , b_i es constante		

Parte 2.2

El concepto de sistema de ecuaciones lineales se vincula con diversos conceptos. Especifique las relaciones entre ellos dibujando flechas y anote frases o palabras que expliquen los vínculos conceptuales que existen entre los conceptos (ver figura 4.4).

Comente lo que entiende por un sistema de ecuaciones lineales

¡Gracias por su valiosa colaboración!

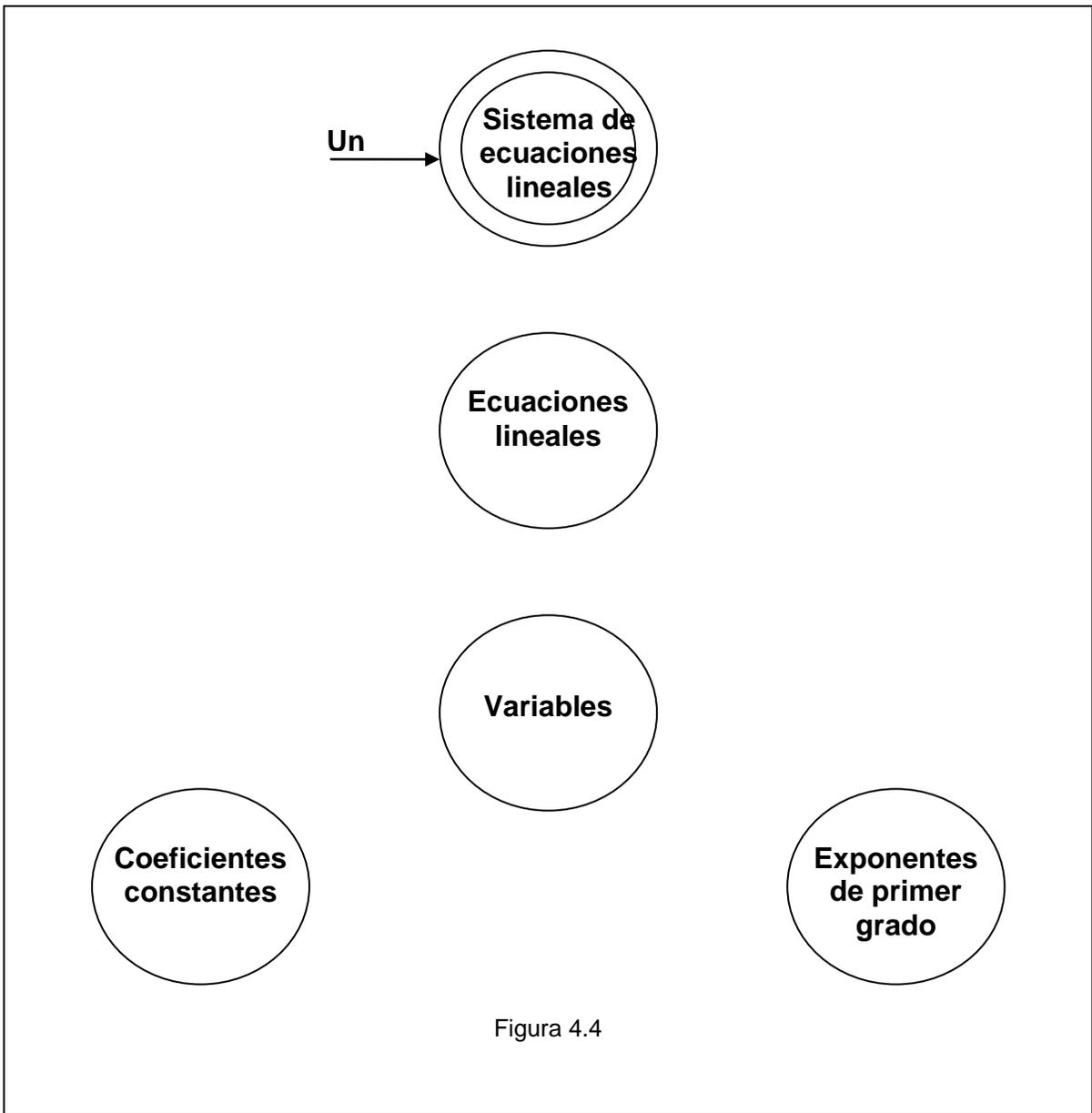


Figura 4.4

Capítulo V

Análisis de los resultados

En el presente estudio, se aplicó el test de estimación de articulación diseñado anteriormente a un grupo de 26 estudiantes universitarios (12 hombres y 14 mujeres), pertenecientes a un curso de Álgebra Lineal. La prueba duró aproximadamente 20 min.

El test de estimación de articulación, de carácter cualitativo, arrojó los resultados que a continuación se muestran y comentan.

5.1 Análisis de la sección 1.1

En esta parte, el test buscaba explorar el grado de conceptualización de los conceptos (nivel 1 de articulación). Para ello, se hablaban de ciertos preconceptos (términos y representaciones) relacionados con el concepto de ecuación lineal. Se les cuestionó a los estudiantes sobre lo que identifican como las condiciones que definen una ecuación lineal en las variables x y y . Las respuestas esperadas se muestran en la tabla 5.1.

<i>Términos y Representaciones implicadas en el concepto</i>	<i>Pregunta</i>	<i>Si</i>	<i>No</i>
Verbal	Los exponentes de algún término pueden ser negativos		X
Verbal	Los coeficientes de x y y son constantes	X	
Gráfica	La representación geométrica de una ecuación lineal es	X	
Algebraica	Después de simplificar al máximo, puede aparecer un término de la forma e^x		X
Algebraica	La ecuación $5x + \sqrt{2}y = b$ es lineal en x y y ; b es constante	X	

Tabla 5.1 Respuestas esperadas en las preguntas de la sección 1.1

Los resultados obtenidos con el test, en porcentaje, se muestran en la tabla 5.2 y figura 5.3, respectivamente.

<i>Pregunta</i>	<i>Si</i>	<i>No</i>	<i>No contestó</i>
Los exponentes de algún término pueden	31	69	0

ser negativos			
Los coeficientes de x y y son constantes	38	58	4
La representación geométrica de una ecuación lineal es	100	0	0
Después de simplificar al máximo, puede aparecer un término de la forma e^x	35	65	0
La ecuación $5x + \sqrt{2}y = b$ es lineal en x y y ; b es constante	50	50	0

Tabla 5.2 Estadísticas obtenidas de las preguntas de la sección 1.1

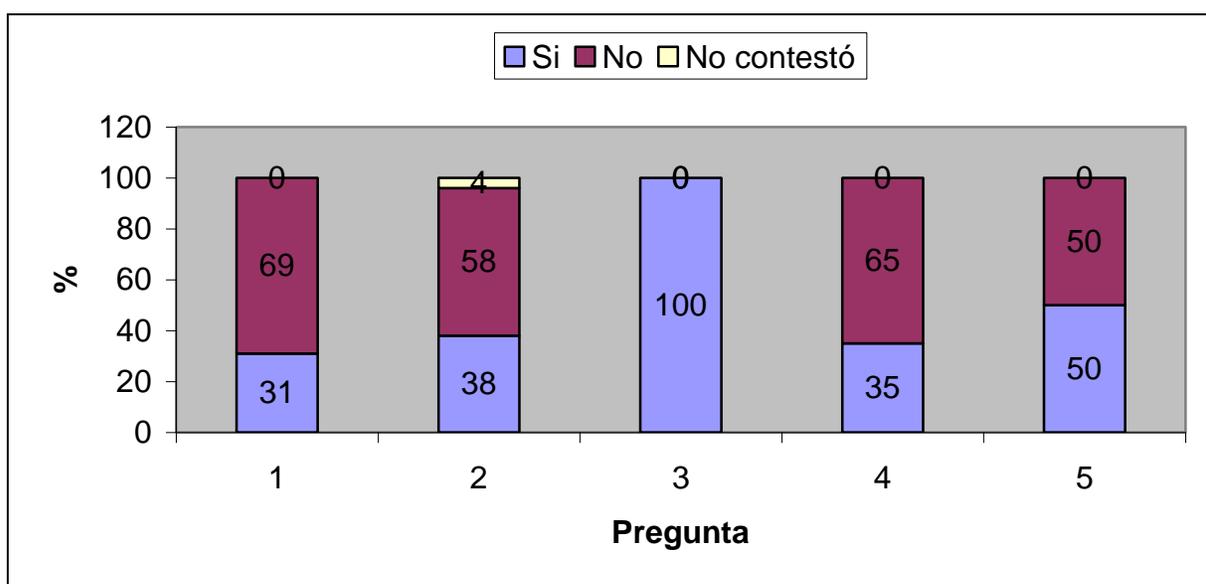


Figura 5.3 Resultados en porcentaje de las preguntas de la sección 1.1

Análisis:

- La primera pregunta refleja que el concepto de ecuación general y ecuación lineal confunden al 31% de los estudiantes, ya que es condición necesaria de esta última que los exponentes de sus variables sean positivos y de grado 1.
- La segunda pregunta muestra que sólo el 38% de los estudiantes acertaron, lo cual hace pensar que posiblemente comprenden en cierta medida el concepto de coeficiente en la ecuación lineal. El 58% restante no parece identificarlo adecuadamente.
- La tercera pregunta muestra que la representación gráfica de la ecuación lineal (la recta), es el tipo de representación más conocida por los estudiantes (100).
- La cuarta pregunta plantea que la ecuación lineal podría contener términos exponenciales, lo cual es un error, pero el 35% de los encuestados lo creen correcto. Esto refleja una dificultad de entender la representación algebraica propia de la ecuación lineal.

- La quinta pregunta parece demostrar que los estudiantes dudan si el término b es una constante o variable, ya que la mitad de ellos lo afirma y lo otra lo niega.

La conclusión general sobre esta parte, es que al parecer las representaciones verbales y algebraicas son las que arrojan más confusiones en los estudiantes y por lo tanto, les son más difíciles de asociar con el concepto de ecuación lineal; por otro lado, la representación grafica es la que mejor vinculan con ella.

Finalmente, haciendo un promedio de los porcentajes en donde los encuestados acertaron en las respuestas correctas, se observa que el 64.4% presentan las concepciones adecuadas sobre los preconceptos implicados con el concepto de ecuación lineal.

5.2 Análisis de la sección 1.2

En esta parte, el test buscaba explorar el grado de conceptualización de la estructura y sistema conceptual (nivel 2 y 3 de articulación). Para ello, se les cuestionó a los estudiantes sobre como el concepto de ecuación lineal se vincula con otros conceptos. Se les solicitó que especificaran las relaciones entre ellos, dibujando flechas y anotando frases o palabras que expliquen los vínculos conceptuales que existen entre los conceptos. Para comparar las respuestas obtenidas de los estudiantes, se desarrollo una representación esquemática del concepto de ecuación lineal (ver figura 5.4).

Los resultados obtenidos por observación cualitativa en el test y expresados en porcentaje, de los niveles de estructura y sistema conceptual (nivel 2 y 3 de articulación), se muestran en la tabla 5.5 y figura 5.6.

	<i>Total</i>	<i>En parte</i>	<i>Bajo o ninguno</i>
Estructura	58	23	19
Sistema	58	19	23

Tabla 5.5 Estadísticas obtenidas en las preguntas de la sección 1.2

Las estimaciones cualitativas de las respuestas en el test, se obtuvieron bajo los siguientes criterios: en el caso “total”, es porque siguen exactamente o de forma muy cercana la estructura y conformación del sistema conceptual propuesto. En el caso “parcial”, la estructura realizada por el estudiante solo tiene parte de la estructura propuesta; y en el caso “bajo o ninguno”, la estructura no refleja un avance entre los niveles, ya que sólo quedo como un conglomerado o se encuentran estructurados sin un sentido claro o son ambiguos.

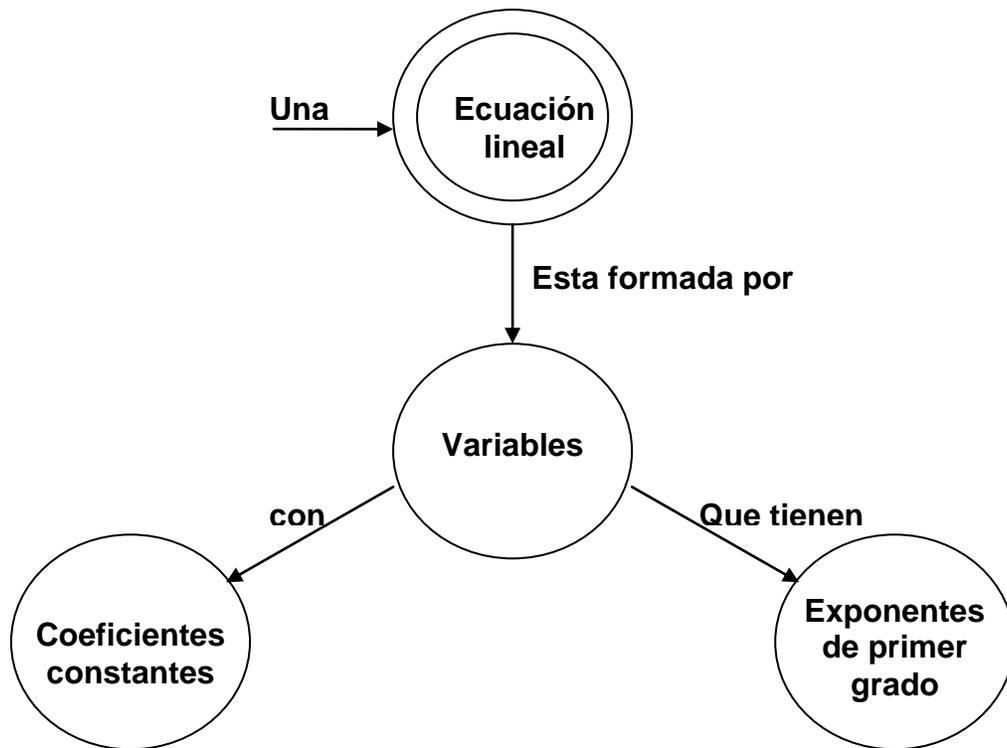


Figura 5.4 Representación esquemática de los componentes del concepto de ecuación lineal

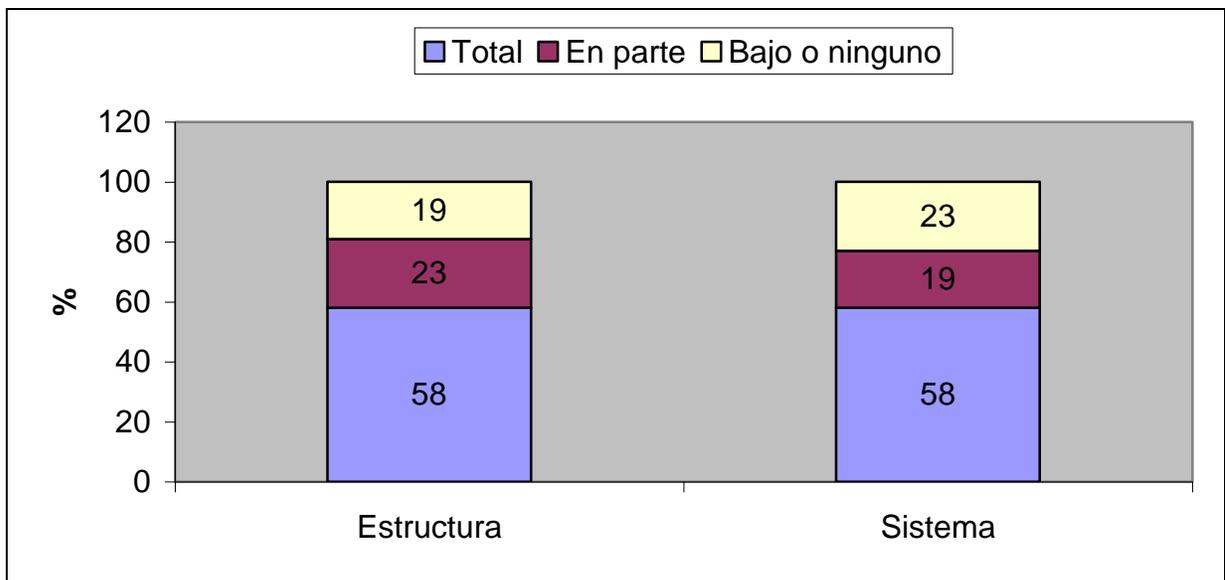


Figura 5.6 Resultados en porcentaje de las preguntas de la sección 1.2

Análisis:

Al parecer, el 58% de los estudiantes alcanzan pasar del nivel 1 al nivel 2 y 3 de articulación. Esto demuestra que un poco más de la mitad de los estudiantes encuestados llevan de manera adecuada y satisfactoria el proceso de articular.

Por otro lado, el 42% restante tienen problemas para alcanzar la estructura o el sistema conceptual; tal vez esto es debido a que esos estudiantes no tienen claro los vínculos y secuencia que siguen los conceptos relacionados con el concepto de ecuación lineal. También es posible que buscaran estructurar de manera diferente los conceptos que se presentaban en esta sección del test.

Por último, ninguno de los encuestados considero el excluir o incluir conceptos que no se encontraban dentro de esta parte del test. Todos dieron por hecho que eran los conceptos suficientes y necesarios para lo que se les solicitaba.

5.3 Análisis de la sección 2.1

En esta sección, al igual que en la parte 1.1, el test buscaba explorar el grado de articulación de los conceptos (nivel 1 de articulación). Para ello, se hablaban de ciertos preconceptos (términos y representaciones) relacionados con el concepto de sistema de ecuaciones lineales. Se les pidió a los estudiantes que identificaran las condiciones que definen un sistema de ecuaciones lineales, en las variables x y y . Las respuestas esperadas se muestran en la tabla 5.7.

<i>Términos y Representaciones implicadas en el concepto</i>	<i>Pregunta</i>	<i>Si</i>	<i>No</i>
Verbal	Es una colección de ecuaciones lineales	X	
Verbal	Los coeficientes de x y y son constantes	X	
Verbal	Los términos independientes pueden ser variables		X
Gráfica	La representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales es	X	
Algebraica	Después de simplificar al máximo, puede aparecer un término de la forma e^x		X
Algebraica	Las ecuaciones $a_{ij}x + a_{ij}y = b_i$ son lineales en x y y ; b_i es constante	X	

Tabla 5.7 Respuestas esperadas en las preguntas de la sección 2.1

Los resultados obtenidos por el test, en porcentaje, se muestran en la tabla 5.8 y figura 5.9.

Pregunta	Si	No	No contestó
Es una colección de ecuaciones lineales	58	31	11
Los coeficientes de x y y son constantes	46	54	0
Los términos independientes pueden ser variables	46	54	0
La representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales es	92	0	8
Después de simplificar al máximo, puede aparecer un término de la forma e^x	38	58	4
Las ecuaciones $a_{ij}x + a_{ij}y = b_i$ son lineales en x y y ; b_i es constante	77	23	0

Tabla 5.8 Estadísticas obtenidas de las preguntas de la sección 2.1

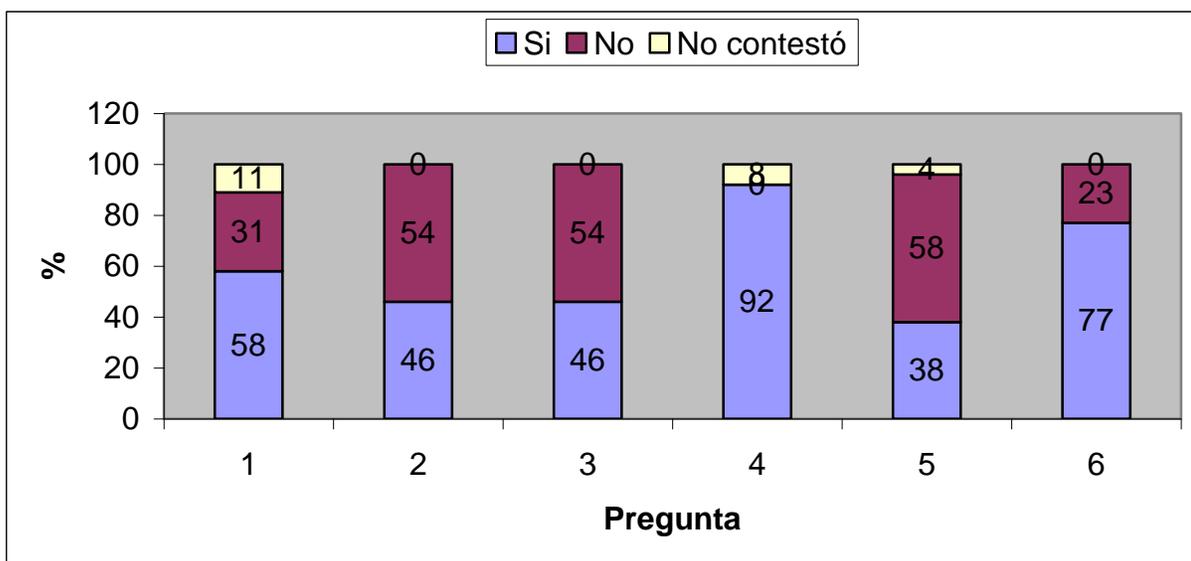


Figura 5.9 Resultados en porcentaje de las preguntas de la sección 2.1

Análisis:

- La primera pregunta refleja que el concepto de sistema de ecuaciones lineales no es claro para el 31% de los estudiantes (exactamente el mismo que los que confunden el concepto de ecuación lineal y ecuación). Un aspecto relevante es el que el 11% de los estudiantes encuestados, no estaban seguros de que si lo que se preguntaba era o no un sistema de ecuaciones lineales. Tal vez esto se deba a la ambigua o poca comprensión que poseen del concepto del sistema lineal.

- La segunda pregunta muestra que solo el 46% de los estudiantes parecen entender el concepto de coeficiente en las ecuaciones lineales. El 54% restante no lo identifica adecuadamente. Es de notarse que se comprende mejor el concepto de coeficiente dentro del contexto de un sistema lineal, que en el de una sola ecuación lineal (6% más). La posible razón de este hecho es que el concepto de sistema de ecuaciones lineales se enseña y trabaja más en el ámbito escolar, que el de la ecuación lineal.
- La tercera pregunta muestra que solo el 54% de los estudiantes conceptualizan correctamente que los términos independientes del sistema lineal son constantes. El restante 46% tal vez no comprenda esta consideración, debido a que la descripción verbal utilizada les impida conceptualizar adecuadamente el término independiente (ver pregunta seis).
- La cuarta pregunta muestra que la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales (un par de rectas en un plano cartesiano) es ampliamente conocida por los estudiantes (92%). El 8% restante no contestaron, debido tal vez a que un sistema lineal no es solo un par de rectas, sino que pueden ser además, planos o hiperplanos.
- La quinta pregunta plantea que la ecuación lineal podría contener términos exponenciales, lo cual es un error, pero el 38% de los encuestados lo creen correcto, porcentaje muy similar (35%) de los estudiantes que piensan lo mismo para la ecuación lineal. Esto refleja una dificultad de entender la representación algebraica propia de la ecuación lineal. Inclusive, el 4% de los encuestados, se abstuvieron de afirmar algo al respecto.
- La sexta pregunta con su 77% de aciertos, parece demostrar que los estudiantes saben distinguir que el término b_i es una constante; solo el 23% no lo comprende adecuadamente. A diferencia que en la ecuación lineal, los porcentajes son notoriamente diferentes; esta diferencia se debe tal vez a que los sistemas de ecuaciones lineales se representan comúnmente de forma algebraica.

La conclusión general sobre esta parte, es que al parecer las representaciones verbales, gráficas y algebraicas son mejor conocidas y manejadas por los estudiantes encuestados, a diferencia del caso de la ecuación lineal. El sistema de ecuaciones lineales es un concepto muy trabajado en los cursos de Álgebra Lineal y tal vez por esa razón, los estudiantes no presentan muchos problemas al definirlos.

Finalmente, haciendo un promedio de los porcentajes en donde los encuestados acertaron en las respuestas correctas, se observa que en un 64.2% presentan las concepciones adecuadas sobre los preconceptos implicados con el concepto de sistema de ecuaciones lineales, porcentaje muy similar al obtenido en la parte 1.1 del test (64.4%).

5.4 Análisis de la sección 2.2

En esta sección, como en la parte 1.2, el test buscaba explorar el grado de conceptualización de la estructura y sistema conceptual (nivel 2 y 3 de articulación). Para ello, se les cuestionó a los estudiantes sobre como el concepto de sistema de ecuaciones lineales se vincula con diversos conceptos. Se les pidió que especificaran las relaciones entre ellos dibujando flechas y anotando frases o palabras que explicarán los vínculos conceptuales que existen entre los conceptos. Para comparar las respuestas obtenidas de los estudiantes, se desarrollo una representación esquemática del concepto de sistema de ecuaciones lineales (ver figura 5.10).

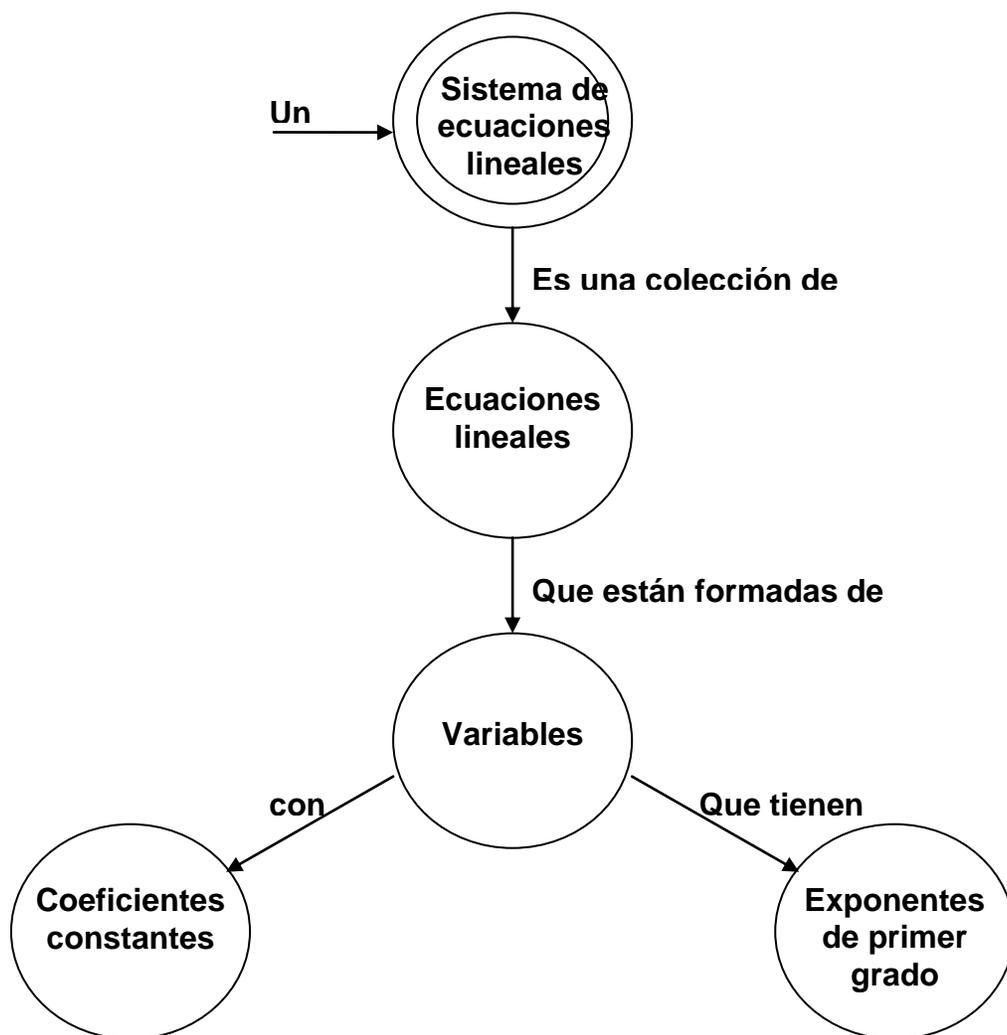


Figura 5.10 Representación esquemática de los componentes del concepto de sistema de ecuaciones lineales

Los resultados obtenidos por análisis cualitativo en el test y expresados en porcentaje, de los niveles de estructura y sistema conceptual (nivel 2 y 3 de articulación), se muestran en la tabla 5.11 y figura 5.12.

	<i>Total</i>	<i>En parte</i>	<i>Bajo o ninguno</i>
Estructura	58	27	15
Sistema	58	15	27

Tabla 5.11 Estadísticas obtenidas en las preguntas de la sección 2.2

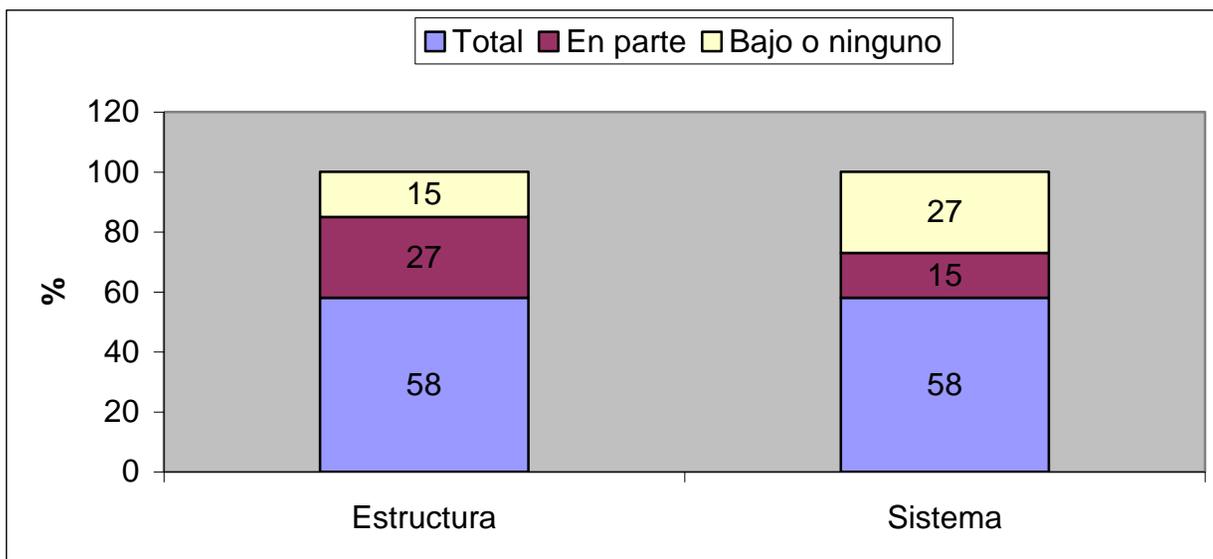


Figura 5.12 Resultados en porcentaje de las preguntas de la parte 2.2

Las estimaciones cualitativas de las respuestas en el test, se obtuvieron bajo los mismos criterios que en la sección 1.2: en el caso “total”, se considera que los estudiantes siguen exactamente o de forma muy cercana la estructura y conformación del sistema conceptual propuesto. En el caso “parcial”, la estructura realizada por el estudiante solo tiene parte de la estructura propuesta; y en el caso de “bajo o ninguno”, la estructura no refleja un avance entre los niveles, ya que sólo queda como un conglomerado los conceptos o se encuentran estructurados sin un sentido claro o ambiguo.

Análisis:

Al parecer, el 58% de los estudiantes alcanzan pasar del nivel 1 al nivel 2 y 3 de articulación (de igual forma como en la parte 1.2 del test). Esto demuestra que un poco más de la mitad de los estudiantes encuestados llevan de manera adecuada y satisfactoria el proceso de articular.

Por otro lado, el 42% restante tienen problemas para alcanzar la estructura o el sistema conceptual, tal vez debido a que esos estudiantes no tienen claro los vínculos y secuencia que siguen los conceptos relacionados con el concepto de sistema de ecuaciones lineales. También es posible que buscaran estructurar de manera diferente los conceptos que se presentaban en esta sección del test.

Por último, y al igual que en parte 1.2 del test, ninguno de los encuestados consideró el excluir o incluir conceptos que no se encontraban dentro de esta sección del test. Todos dieron por hecho que eran los conceptos suficientes y necesarios para lo que se les solicitaba.

5.5 Análisis de la pregunta final del test

En cuanto a la pregunta final que se hace en el test: “*Comente lo que entiende por un sistema de ecuaciones lineales*”, los estudiantes respondieron lo siguiente (ver figura 5.13):

- El 65% redactaron la definición de sistema de ecuaciones lineales de manera verbal, reafirmando de manera íntegra lo que habían estructurado en forma gráfica, lo cual muestra consistencia en sus conocimientos.
- El 23% redactaron parte de la definición y/o otros aspectos sobre el sistema de ecuaciones lineales de manera verbal, lo que solo en parte confirma lo que habían estructurado en los diagramas presentados, reflejando que poseen concepciones parcialmente semejantes con lo representado en los diagramas.
- El 12% escribieron definiciones que no correspondían con los diagramas que desarrollaron anteriormente, lo cual refleja que la definición que poseen del sistema de ecuaciones lineales es parcial, o sólo conciben partes de su definición.

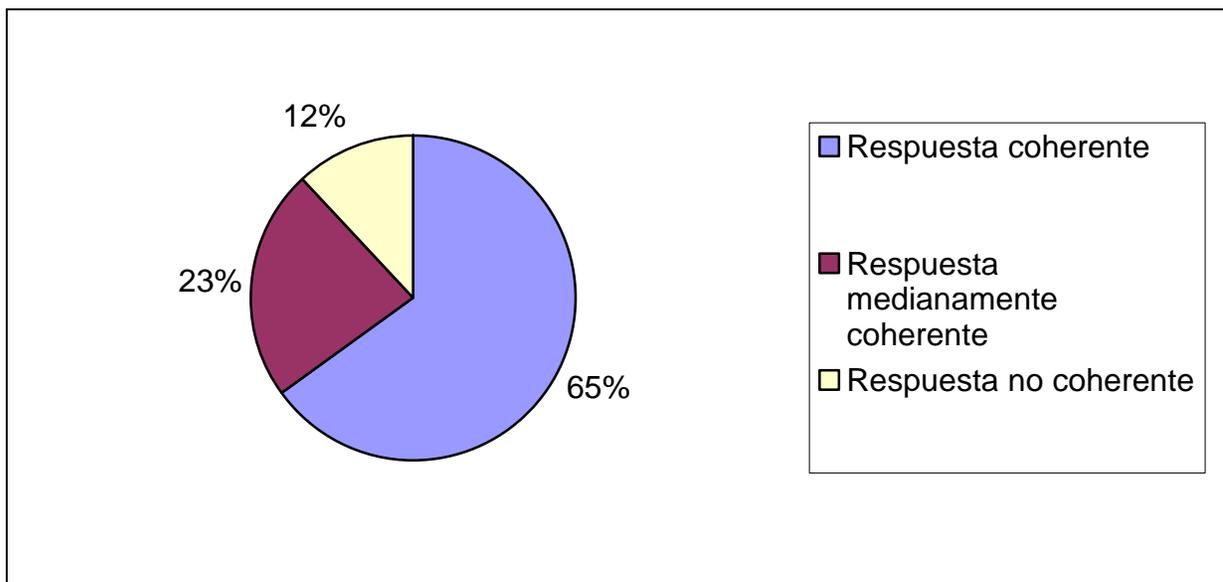


Figura 5.13 Porcentajes de los diversos tipos de respuestas de los estudiantes

Algunos otros conceptos mencionados en esta parte por los estudiantes, fueron:

- Un sistema de ecuaciones lineales se representa gráficamente como rectas (8%)

- Presentan una solución y existen métodos para encontrarla (8%)
- Se encuentran vinculados con la solución de problemas, surgidos de situaciones reales (solo el 4% lo menciona)

En cuanto a la característica de multiplicidad de caminos posibles para relacionar los conceptos presentados, característica propia de la articulación de saberes, los estudiantes que lograron llegar al nivel 2 y 3, mostraron que el 65% siguieron la estructura propuesta para el sistema conceptual presentado, sin haber conocido ésta. El restante 35% mostraron otras formas de estructurar el sistema conceptual, que también se pueden considerar como válidos, pero diferentes (ver figura 5.14). Algunos ejemplos se muestran en las figuras 5.15 y 5.16.

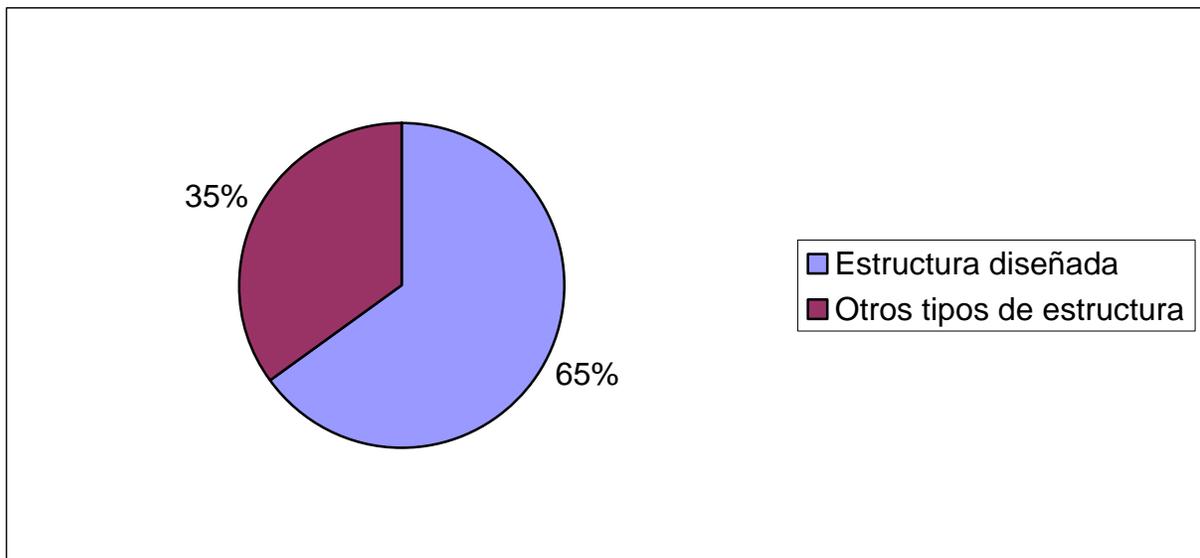


Figura 5.14 Porcentajes de los casos de multiplicidad de caminos de articulación

Finalmente, se puede concluir, entre otras cosas, que los estudiantes encuestados muestran un grado estimado de articulación, sobre los temas de ecuación lineal y sistema lineal, basados en los resultados del test y bajo el marco de referencia del proceso de articular propuesto en el presente estudio (ver figura 5.17), de la siguiente forma:

- Nivel 1 de articulación (conglomerado conceptual): de 64.2% a 64.4%
- Nivel 2 de articulación (estructura conceptual): de 58%
- Nivel 3 de articulación (sistema conceptual): de 58%

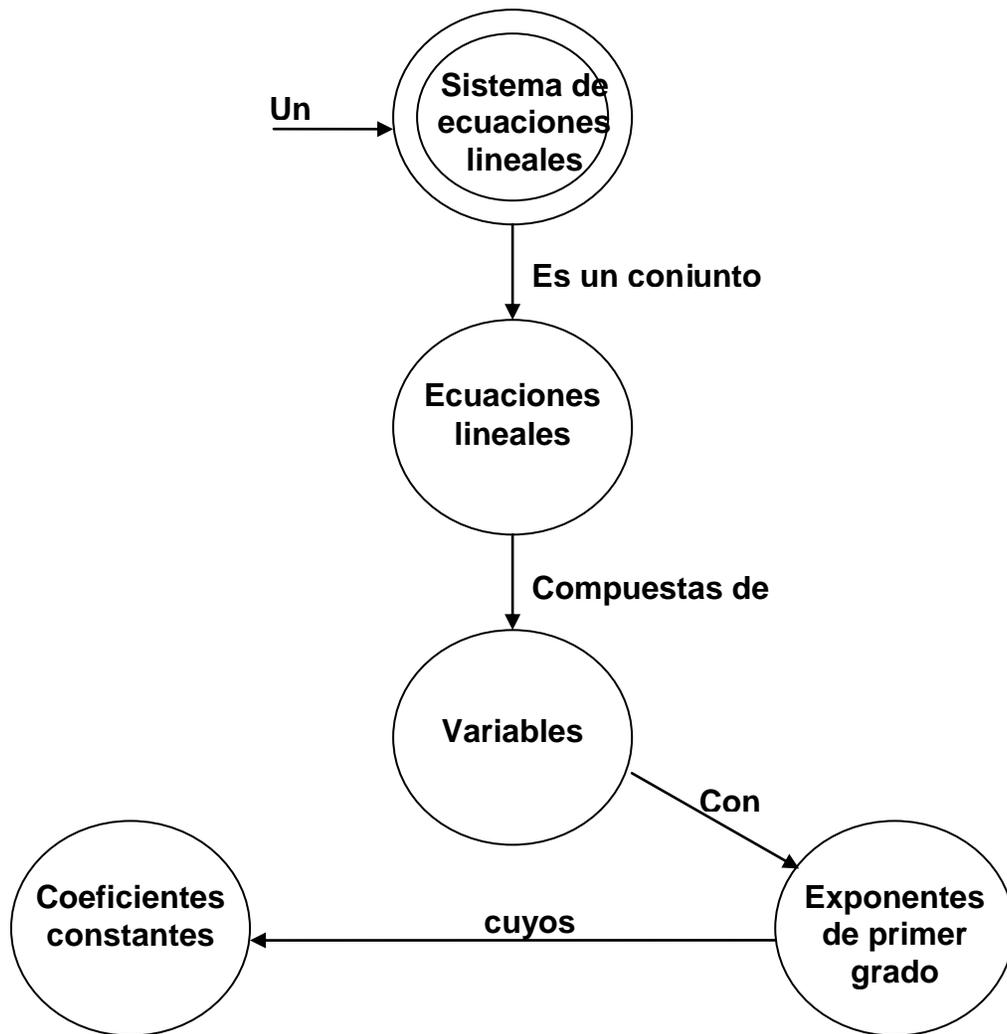


Figura 5.15 Ejemplo de grafo conceptual realizado por un estudiante

Al parecer, para los estudiantes encuestados, les es más fácil el conformar conceptos de los respectivos preconceptos, que el armar redes conceptuales más sofisticadas; o en otras palabras, les es un poco más difícil avanzar a los niveles de estructura y sistema conceptual.

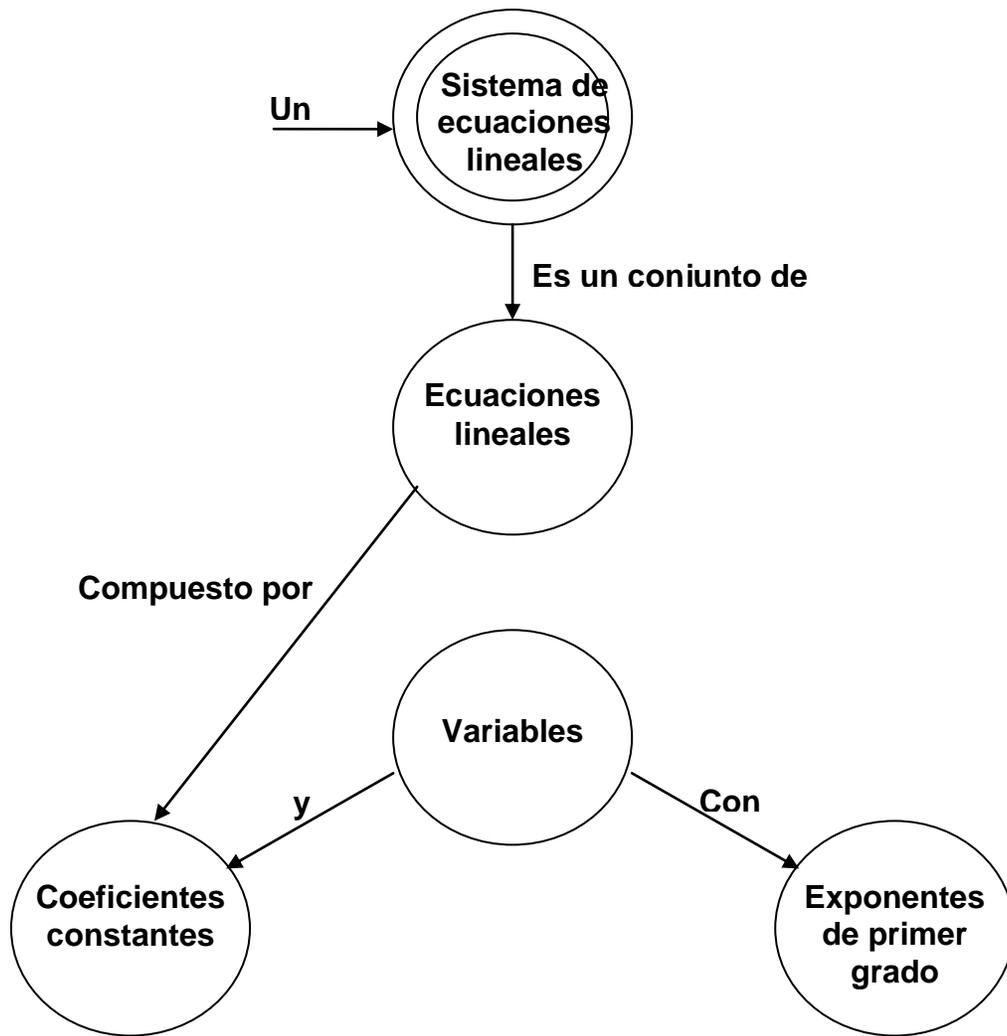


Figura 5.16 Ejemplo de grafo conceptual realizado por un estudiante

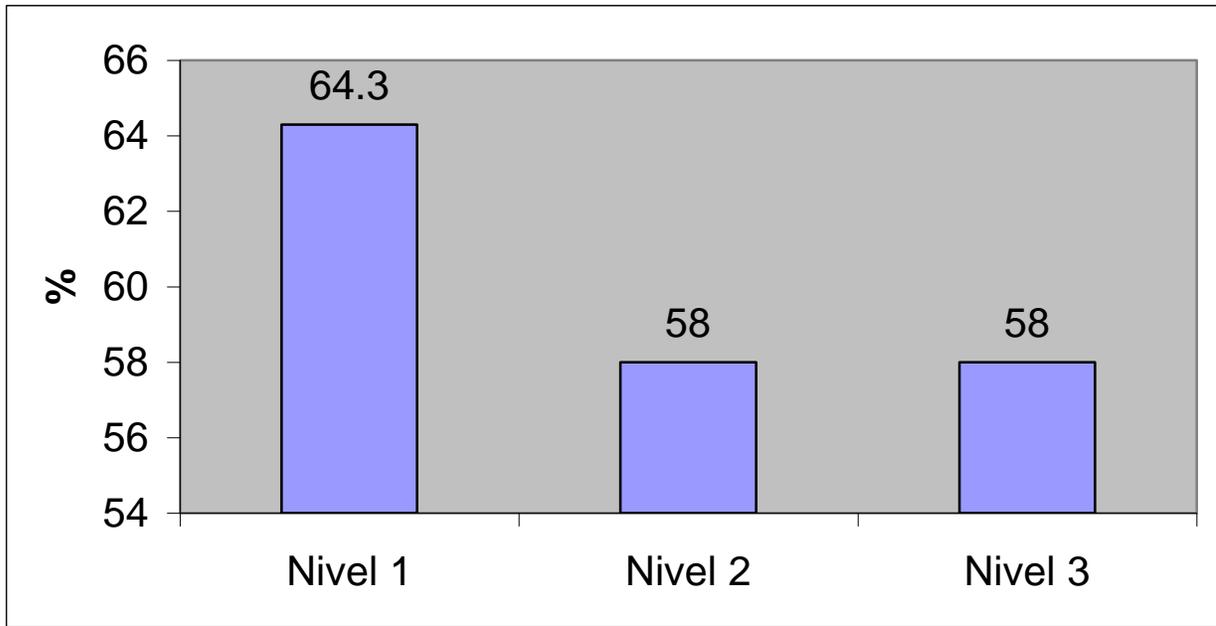


Figura 5.17 Porcentajes del grado de articulación estimado en los estudiantes, sobre los temas de ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales

Capítulo VI

Conclusiones y reflexiones

Se puede decir, que en respuesta a la primera pregunta de investigación formulada en el presente estudio, solo se estudiaron y analizaron específicamente cuatro conceptos sobre el tema de los sistemas de ecuaciones lineales: variables, dígitos (coeficientes y exponentes), operaciones algebraicas (suma y multiplicación) y ecuación lineal. La razón de por que se acotó a éste número, fue para hacer manejable el diseño y análisis del test de estimación aplicado a los estudiantes, ya que durante la investigación de los sistemas lineales, se encontraron más de una docena de conceptos y sus representaciones matemáticas respectivas. Algunos conceptos que encuentran relación directa con los sistemas lineales son los vectores, la combinación lineal, las matrices, los determinantes y las rectas, por mencionar algunos.

Para responder la segunda pregunta de investigación formulada en el presente estudio, se puede decir de manera general que la medida o estimación del grado de articulación sobre los temas de ecuación lineal y sistema lineal en los estudiantes encuestados, arrojó algunos resultados de carácter cualitativo (básicamente datos estadísticos), los cuales fueron analizados bajo las consideraciones que plantea el marco teórico del presente trabajo; los datos de tipo cuantitativo mostrados en el capítulo del análisis de los resultados (valores en porcentaje), fueron producto de un simple tratamiento estadístico de la información recaba en el test aplicado a los estudiantes.

Entre lo más relevante que se pudo estimar con el test sobre algunos aspectos relativos con la articulación, fue el de poder medir el grado de utilización de las diversas representaciones matemáticas (algebraica, gráfica y verbal) de los conceptos de ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales; además, el de estimar que los estudiantes muestran un mejor desempeño en la actividad de articular del nivel 0 al nivel 1, que del nivel 1 al nivel 2 y 3. La posible razón de esto es porque es necesario poseer una mejor claridad conceptual en los conceptos a manejar, además de la mayor complejidad conceptual a la que se enfrenta quien realiza la articulación de saberes en los niveles superiores al nivel 1. Otro de los resultados interesantes de la medida de la articulación es la corroboración de la existencia de una multitud de caminos para articular los mismos elementos conceptuales, de lo cual ya se ha hablado detalladamente en el presente trabajo. Finalmente, se puede decir que un buen número de los estudiantes analizados (más del 60%), logran llevar a cabo, de manera exitosa, el acto de articular saberes, particularmente en el contexto de las ecuaciones lineales y el sistema de ecuaciones lineales.

Por otro lado, entre las limitaciones más evidentes que aparecieron durante el desarrollo del presente trabajo, se pueden mencionar las siguientes:

- Existe una escasa caracterización sobre la idea de la articulación en el principio curricular de la NCTM, documento fundamental del presente estudio, conllevando esto a buscar un sustrato conceptual que tuvo que ser provisto con concepciones más generales sobre el diseño curricular, perdiéndose en ciertos momentos, el contexto del currículo matemático escolar, centro de estudio del presente trabajo.
- Las escasas y esporádicas investigaciones relacionadas con las ideas de la articulación, no permitieron realizar un estudio del arte más exhaustivo en el presente trabajo.
- No se tiene un marco de referencia claramente definido, que especifique a que nivel se debe desarticular los temas del currículo escolar para diseñar los test o instrumentos didácticos que aborden el método del proceso de articular. Esta problemática surge debido a la enorme complejidad que presenta la mayoría de los temas matemáticos.
- El proceso de desarrollar test o instrumentos didácticos que siguen el método del proceso de articular, requieren de un enorme esfuerzo conceptual por parte del diseñador para conocer todos los preconceptos (términos y sus representaciones), conceptos y vínculos conceptuales para llevar al estudiante desde el nivel 0 al 3 del proceso de articular, lo que se convierte en una limitante para la realización de productos documentales de una calidad aceptable para la didáctica de los temas matemáticos.

Surgidas de las limitaciones antes mencionadas, se ha pensado en proponer la realización de otros estudios a futuro, para complementar y nutrir el presente estudio:

a) Propuestas particulares

Es necesario profundizar en el estudio de los conceptos generales que sirven de trasfondo o sustrato conceptual, de conceptos más específicos, como por ejemplo, el concepto de área que aparece relacionado con una línea punteada, inmiscuido en el concepto de área del triángulo (ejemplo mencionado en el capítulo II). A estos conceptos también se les conoce en otras investigaciones de Educación Matemática, como nociones matemáticas. Esto es con el fin de entender el papel que juegan las nociones matemáticas dentro del proceso de articular.

Debido al estrecho vínculo que se ha notado que existe con los modelos conceptuales presentados, se considera necesario implementar algunos elementos de técnicas cognitivas (mapas conceptuales, grafos proposicionales, etc.), que aporten aspectos estructurales para el desarrollo de los instrumentos de la experimentación y el análisis de los resultados de éstos.

Llevar a cabo una investigación más profunda, en cuanto a las características que debe tener un sujeto que articula y el tiempo que emplea para ello, debido a que son dos elementos causales del fenómeno de articulación y que se consideran no han sido plenamente explorados, ya que en su análisis intervienen aspectos con un alto contenido cognitivo.

Es necesario desarrollar un marco de referencia lo suficientemente robusto para diseñar test e instrumentos didácticos, que sirvan para la experimentación y el análisis de aspectos relacionados con el proceso de articular.

b) Propuestas generales

Es necesario profundizar en el pensamiento de los sistemas, para dar más soporte teórico al marco teórico propuesto, debido a que fué notorio que el enfoque de sistemas puede enriquecerlo sustancialmente, como lo hizo en el presente trabajo; por ejemplo, definir nuevos principios de articulación o caracterizaciones más específicas de los sistemas conceptuales, por mencionar algunos.

Llevar a cabo el análisis detallado de diversas corrientes filosóficas, debido a que pueden aportar aspectos relevantes para enriquecer el marco referencial desarrollado. Ejemplo de ello, es el atomismo griego y el mecanicismo cartesiano.

Llevar a cabo estudios teóricos, para la búsqueda y el análisis de características conceptuales de tipo general, en sistemas que presenten articulación, como por ejemplo, las composiciones musicales o el diseño de los seres vivos, por mencionar algunos.

Llevar a cabo estudios teóricos, para ampliar la definición formal de los niveles del proceso de articular y los principios de la articulación, usando los principios de la Teoría Axiomática de Sistemas, para llevarlos a un nivel formal, con el fin de que sirvan como los cimientos de una posible “Teoría de la Articulación de Saberes Matemáticos”.

La enorme utilidad de las ideas sobre articulación, puede conducir a la generalización de los principios de la articulación, que posiblemente puedan ser utilizados en otras disciplinas del conocimiento, además de las matemáticas. Esto con el fin de articular saberes que en otras disciplinas se encuentran desarticulados.

En cuanto los resultados que arroja el presente trabajo en el ámbito de la Educación Matemática, se puede decir que la implicación de las ideas de articulación en el diseño articulado del currículo formal matemático escolar, podría producir el tener un mayor análisis y cuidado cuando se diseñen nuevos planes de estudio de matemáticas, cuidando que los temas a presentar, las interrelaciones conceptuales entre ellos y los objetivos que se pretenden alcanzar con cada uno de los bloques temáticos o programas de estudio y los que persiga el currículo formal matemático

escolar, sean planeados con mayor cuidado y responsabilidad, por lo menos, desde el punto de vista del conocimiento a presentar. Para el que diseña un currículo formal escolar con una concepción de quien entiende el Fenómeno de la Articulación de Saberes Matemáticos, el diseño y estructuración de un plan de estudios articulado, se convierte en una necesidad elemental del ámbito escolar.

En cuanto al aprendizaje de los estudiantes de matemáticas, se tiene la premisa que éstos se ven beneficiados al comprender las ideas esenciales de la Articulación de Saberes Matemáticos, debido a que logran una ganancia conceptual significativa con respecto a los estudiantes que no siguen éste enfoque. Prueba de ello lo muestran algunos de los resultados del test aplicado en el presente estudio. Una sugerencia relevante a este respecto es que se diseñen y construyan instrumentos didácticos basados en el proceso de articular, para uso de los profesores como apoyo didáctico en sus clases y como una herramienta de aprendizaje para los estudiantes de temas matemáticos.

Finalmente, se puede decir que el marco teórico desarrollado en el presente trabajo, se encuentra en un proceso de construcción y que será necesario ir desarrollándolo y nutriéndolo con más experimentación didáctica, además de los aspectos de carácter teórico, provenientes de disciplinas como la Filosofía, la Teoría General de los Sistemas, entre otras; y posiblemente, en un futuro, cuando se robustezca y alcance la madurez teórica, se convierta en una línea de investigación de la Educación Matemática.

Bibliografía

Anfossi, A; Flores Meyer, M. A. (1998). *“Trigonometría rectilínea”*. Editorial Progreso. Treceava reimpresión. México.

Antón, H. (2002). *“Introducción al álgebra lineal”*. Editorial Limusa Wiley. Segunda edición. México.

Apóstol, T. (1978). *“Calculus”*. Volumen 1. Editorial Reverté. Segunda edición. España.

Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. *Tesis de Estado*. Universidad de París VII.

Ayres, F. (1992). *“Matrices”*. Editorial McGraw-Hill. Serie Schaum. Primera edición. México.

Baldor, J. A. (1982). *“Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría”*. Ediciones y distribuciones Códice, S.A. Edición 1982. España.

Baldor, A. (1992). *“Álgebra”*. Publicaciones Cultural S.A. Novena reimpresión. U.S.A.

Barnett, R. A. (1983). *“Matemáticas para administración y ciencias sociales”*. Editorial Interamericana. Primera edición. México.

Barrera Mora, F. (en prensa). *“Álgebra lineal: fundamentos, métodos y ejemplos”*. Editorial Grupo Patria Cultural. México.

Bertoglio, O. J. (1986). *“Introducción a la teoría general de sistemas”*. Segunda reimpresión. Editorial Limusa. México.

Brookshear, J. G. (1993). *“Teoría de la computación. Lenguajes formales, autómatas y complejidad”*. Editorial Addison Wesley Longman de México. Primera edición. México.

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques. *Article occasionnel n. 2. IREM de Bordeaux*.

Bower, G. H.; Hilgard, E. R. (2000). *“Teorías del aprendizaje”*. Editorial Trillas. Séptima reimpresión. México.

Carman, R. A. (1990). *“Introducción a los vectores. Texto programado”*. Editorial Noriega Limusa. Sexta reimpresión. México.

Chapra, S. C.; Canale, R. P. (1996). *“Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales”*. Editorial McGraw-Hill. Primera edición. México.

Checkland, P. (1993). *“Pensamiento de sistemas, práctica de sistemas”*. Editorial Limusa. Grupo Noriega Editores. Megabyte. Primera edición. México.

Chevallard, Y. (1998). *“La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado”*. Editorial Aique. Tercera edición. Argentina.

Cohn. P. M. (1968). *“Ecuaciones lineales”*. Editorial UTEHA. Primera edición. México.

Courant, R. y Robbins, H. (1971). *“¿Que es la matemática?”*. Antología de matemáticas. Lecturas universitarias 7. Editorial UNAM. Primera Edición. México.

Coxeter, H. S. M. (1984). *“Fundamentos de geometría”*. Primera reimpresión. Editorial LIMUSA. México.

Díaz Barriga, A. (1999). *“Ensayos sobre la problemática curricular”*. Editorial Trillas. Quinta Edición. México.

Diccionario Enciclopédico Ilustrado Océano Uno. (1992). Grupo Editorial Océano. Colombia. 1 Vol.

Diccionario de Pedagogía. (1970). Editorial Labor. España. 2 Vols.

Duval, R. (1999). *“Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales”*. Universidad del Valle. Buenos Aires, Argentina.

Fiol, M; Arias Galicia, F. (1982). *“Elementos de matemáticas para las ciencias de la administración y del comportamiento”*. Editorial Trillas. Primera reimpresión. México.

Gimeno Sacristán, J. (1996). *“El currículo: una reflexión sobre la práctica”*. Ediciones Morata, S. L. Primera reimpresión. España.

Glazman, R.; De Ibarrola, M. (1978), *“Diseño de planes de estudio”*. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Centro de Investigaciones y Servicios Educativos (CISE). Primera edición. México.

Gorostiza, L. G. (1998). *“Foros. Las matemáticas en México: educación y desarrollo”*. Memoria. Academia Mexicana de Ciencias. México.

Gorsky D. P.; Tavants P.V.:(1970). *“Lógica”*. Editorial Grijalbo. Décimo Quinta Edición. México.

Gutiérrez Sáenz, R. (2004). *“Introducción a la lógica”*. Editorial Esfinge. Séptima edición. México.

Hereida, B. (1976). *“La articulación y estructuración de la enseñanza”*. Sección de didáctica de la Facultad de Medicina, Veterinaria y Zootecnia, UNAM. México.

Hernández Forte, V. (2006). *“Mapas conceptuales. La gestión del conocimiento en la didáctica”*. Editorial Alfaomega. Primera reimpresión. México.

Herstein, I. N.; Winter, D. J. (1989). *“Álgebra lineal y teoría de matrices”*. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición. México.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.2 pp. 3-7.

Hitt, F. (2002). *“Funciones en contexto”*. Editorial Prentice Hall. Primera edición. México.

Hopcroft, J. E.; Ullman, J. D.; (1996). *“Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación”*. Editorial CECSA. Primera Edición. México.

Huerta Ibarra, J. (2003). *“Organización lógica de las experiencias de aprendizaje”*. Editorial Trillas. Cuarta reimpresión. México.

Ibarra Barrón, C. (1998). *“Lógica”*. Editorial Pearson Educación. Primera Edición. México.

Iriarte V. Balderrama, R. (1990). *“Métodos Numéricos”*. Editorial Trillas. Primera edición. México.

Johnsonbaugh, R. (1999). *“Matemáticas discretas”*. Editorial Prentice Hall. Cuarta edición. México.

Kindle, J. H. (1991). *“Geometría Analítica”*. Editorial McGraw Hill. Serie Schaum. Primera Edición. México.

Klir, G. J.; Bertalanffy, L.V.; Ashby, W. R.; Weinberg, G. M. (1981). *“Tendencias en la teoría general de sistemas”*. Alianza Editorial. Segunda edición. España.

Lachman, R., J. L. Lachman y E. C. Butterfield. (1979). *“Cognitive Psychology and Information Processing: An introduction”*, Erlbaum, Hillsdale, Nueva Jersey, U.S.A.

Landaverde, F. J. (1970). *“Geometría”*. Editorial Progreso. Sexta Edición. México.

Lara Aparicio et al. (1973). *“Programas de matemáticas. Semestres I y II”*. Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior (ANUIES). Primera edición. México.

Lehmann, C. H. (2001). *“Geometría Analítica”*. Editorial Limusa -Noriega Editores. Trigésimo primera reimpresión. México.

Lipschutz, S. (1970). *“Álgebra lineal”*. Editorial McGraw-Hill. Serie Schaum. Primera edición. México.

Lipschutz, S. (1991). *“Teoría de conjuntos y temas afines”*. Serie Schaum. Editorial Mc Graw-Hill/Interamericana de México. Primera edición. México.

López Ramírez, E. O. (2002). *“El enfoque cognitivo de la memoria humana. Técnicas de investigación”*. ITESM. Universidad Virtual. Editorial Trillas. Primera edición. México.

Mateos Muñoz, A. (2004). *“Compendio de etimologías grecolatinas del español”*. Editorial Esfinge. Cuadragésima cuarta edición. México.

Mayer, R. E. (1986). *“Pensamiento, resolución de problemas y cognición”*. Ediciones Paidós. Primera edición. España.

Moles, A. (1976). *“Teoría de la información y percepción estética”*. Ediciones Jucar. Primera edición. España.

Morgannov, I. B. (1966). *“L’utilisation des graphes dans l’elaboration des programmes”*. Revue No.1 d’enseignement programme. París, Francia.

Mounin, G. (1974). *“Claves para la lingüística”*. Editorial Anagrama. Primera edición. España

Ontoria, A.; Ballesteros, A.; Cuevas, M. C.; Giraldo, L.; Martín, I.; Molina, A.; Rodríguez, A.; Vélez, U. (2004). *“Cómo ordenar el conocimiento usando mapas conceptuales”*. Primera edición. Editorial Alfaomega. México.

Oteyza, E.; Lam Hosannilla, E.; Gómez Ortega, J. A.; Ramírez Flores, A.; Hernández Garcíadiego, C. (1994). *“Geometría Analítica”*. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana. Primera edición. México.

Pekelis, V. (1977). *“Pequeña enciclopedia de la gran cibernética”*. Editorial MIR. Moscú. Primera edición. URSS.

Phenix, P. H. (1968). *“Curriculum en Short y Marconnit”*. Contemporay Thought on Public School Curriculum. Browm Co. Pub., Iowa, U.S.A.

Pignatari, D. (1977). *“Información lenguaje, comunicación”*. Editorial Gustavo Gili. Primera edición. España.

Resnick, L. B.; Ford, W. W. (1990). *“La Enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos”*. Primera Edición. Editorial Paidós. España.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En: S. Linares y M.V. Sanchez (Eds), *“Teoría y práctica en Educación Matemática”*. Sevilla, España: Alfar.

Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En, L. Rico y D. Madrid (Eds), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Madrid: Síntesis.

Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference*. Bielefeld - Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ. & IDM.

Sanabria, J. R. (2001). *“Lógica”*. Editorial Porrúa. Vigésimotercera edición. México.

Santos, L. (1997). *“Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas”*. Grupo editorial Iberoamérica. Segunda edición. México.

Schoenfeld, A. H. (1989). *“Teaching mathematical thinking and problem solving”*. En L. B. Resnick y L. E. Klopfer (Eds.), Toward the Thinking Curriculum: current cognitive research. 1989 ASCD Yearbook (pp. 83-103). USA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Serrano, S. (1977). *“Lógica, lingüística y matemáticas”*. Editorial Anagrama. Primera edición. España.

Solomon, P., Goethals, G., Kelley, C., & Stephens, B. (Eds.). (1989). *“Memory.- Interdisciplinary Approaches”*. New York. U.S.A.

Sonntag, R. E.; Van Wilen, G. J. *“Introducción a la Termodinámica clásica y estadística”*. Editorial Noriega Limusa. Sexta Reimpresión. México.

Steiner, H.G. (1984); Balacheff, N. y otros. (Eds.) *Theory of mathematics education (TME)*. ICME 5. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Steiner, H.G. (1985). *“Theory of mathematics education (TME): an introduction”*. For the Learning of Mathematics, Vol 5. n. 2.

Stöcker, K. (1964). *“Principios de didáctica moderna”*. Editorial Kapeluz. Primera edición. Argentina.

Swokowski, E. (1975). *“Álgebra universitaria”*. Editorial C.E.C.S.A. Séptima impresión. México.

Synge 1, J. L. (1951). *“Science: Sense and Nonsense”*. Norton, Nueva York.

Taba, H. (1962). *“Curriculum Development, Theory and Practice”*. Harcourt Brace and World Inc., N.Y. U.S.A.

Taba, H. (1991). *“Elaboración del currículo”*. Editorial Troquel. Novena Edición. Argentina.

NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *“Principios y estándares de la educación matemática”*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla, España.

Thompson, J. E. (1975). *“Álgebra”*. Editorial UTEHA. Segunda edición. México.

Uspensky, J. V. (2001). *“Teoría de ecuaciones”*. Editorial Limusa Noriega Editores. Décima reimpresión. México.

Van Gigch, J. P. (1993). *“Teoría general de sistemas”*. Tercera reimpresión. Editorial Trillas. México.

Wark, K. (1986). *“Termodinámica”*. Editorial Mc Graw-Hill. Cuarta Edición. México.

Referencias en páginas Web

[1] (URL: <http://www.clave.librosvivos.net>). Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[2] (URL: <http://www.nodo50.org>). Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[3] Academia de Ciencias Luventicus. (2006). "*Gottfried Wilhelm Freiherr von LEIBNITZ*". (URL: <http://www.luventicus.org/articulos/02A036/leibnitz.html>). Argentina. Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[4] Alcalá Casado, F. J. (2005). "*Inteligencia Artificial*". (URL: <http://www.sia.eui.upm.es/integr/jalcala/ia/InteligenciaArtificial.pdf>). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[5] Borgognone, M.; Gutierrez, M.; Souza, L.; Astrada, A. (1997). "*La problemática de la articulación en el sistema educativo en el 2 y 3 ciclo E.G.B.*". (URL: <http://www.monografias.com/trabajos13/sised/sised.shtml>). Argentina. Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[6] Echegoyen Olleta, J. (2006). "*Mecanicismo*". (URL: <http://www.e-torredebabel.com/Historia-de-la-filosofia/FilosofiaGriega/Presocraticos/Mecanicismo.htm>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[7] Echegoyen Olleta, J. (2006). "*Mecanicismo. Descartes*". (URL: <http://www.e-torredebabel.com/Historia-de-la-filosofia/FilosofiaMedievalyModerna/Descartes/Descartes-Mecanicismo.htm>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[8] García García, J. (2006). "*El signo lingüístico y el acto de comunicación*". (URL: <http://www.rinconcastellano.com/tl/comunicacion.html>). España. Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[9] Godino, J. D., (2004). "*Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica*". (URL: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España. Fecha de consulta: 15 de octubre de 2004.

[10] Leibnitz, G. W. F. (1714). "Monadología". (URL: <http://www.cibernous.com/autores/leibniz/textos/monadologia.html>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[11] Navalón Vila, C; Pérez Sánchez, M. A.; López García, J.J. (1997). "*Activación de información categorial en tareas de memoria de reconocimiento de dibujos*".

Universidad de Murcia, España. (URL:http://www.um.es/analesps/v13/v13_1/08-13-1.pdf). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[12] Nueva Escuela Argentina. (2002). “*Articulación entre niveles y ciclos*”. (URL: <http://www.nea.edu.ar/inicial/articulacion.htm>). Argentina. Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[13] Santos, D. (2002). “*La metáfora y la imagen en preescolar* “. (URL:<http://www.ateiamerica.com/doc/dora.pdf>). México. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[14] University of Virginia Health System. (2004). “*La Artritis y Otras Enfermedades Reumáticas. Anatomía de una Articulación*”. (URL: http://www.healthsystem.virginia.edu/UVAHealth/adult_arthritis_sp/anatomy.cfm). U.S.A. Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[15] Zamora B., S. (2002). “*Fonética*”. México. (URL: <http://www.geocities.com/sergiozamorab/fonetica.htm>). Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[16.1] (2006). (URL: <http://symploke.trujaman.org/index.php/Atomismo>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[16.2] “*Demócrito y los atomistas*”. (URL: <http://www2.udec.cl/~josqueza/filosofia/democrito.html>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[16.3] “*Las opiniones clásicas. El atomismo*”. (URL: <http://www.elvacio.com/uploads/samples/Cap11.pdf#search='Democrito%20atomismo'>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[16.4] “*Leucipo*”. (URL: <http://www.oya-es.net/reportajes/leucipo.htm>). Fecha de consulta: Octubre del 2006.

[16.5] Arredondo, D. “*Breve introducción histórica a la Medicina Nuclear*”. (URL: <http://radiologia.iespana.es/temas/breveintr.htm>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[16.6] Barrio Gutiérrez, J. (1991). “*Demócrito*”. (URL: <http://www.mercaba.org/Rialp/D/democrito.htm>). Gran Enciclopedia Rialp. Editorial Rialp. Fecha de consulta: Octubre de 2006.

[16.7] Biografías y Vidas S. C. P. (2004). “*Leucipo*”. (URL: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leucipo.htm>). España. Fecha de consulta: Octubre de 2006.

- [16.8] Boonic.com. (2005). "*Atomismo*". (URL: <http://ciencia.boonic.com/3184a-atomismo.htm>). Argentina. Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.9] Campos, R. "*Demócrito: la multiplicidad necesaria*" (URL: <http://www.cibernous.com/autores/astrobiologia/teoria/historia/democrito.htm>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.10] Echegoyen Olleta, J. (2006). "*Atomismo*". (URL: <http://www.e-torredebabel.com/Historia-de-la-filosofia/FilosofiaGriega/Presocraticos/Atomismo.htm>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.11] Fouce, J.M. (2006). "*Demócrito de Abdera*" (URL: <http://www.webdianoia.com/presocrat/democrito.htm>). España. Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.12] Fouce, J.M. (2006). "*Demócrito de Abdera. Fragmentos de Demócrito*". (URL: <http://www.webdianoia.com/presocrat/textos/democrito.htm>). España. Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.13] Romero, N. (1999). "*Leucipo*". (URL: <http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Cie-Hist/Leucipo.htm>). España. Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.14] Wanadoo. (2002). "*Demócrito*". (URL: http://html.rincondelvago.com/democrito_1.html). Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.15] Wikipedia. (2006). "*Atomismo*". (URL: <http://www.brujula.net/wiki/Atomista>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.16] Wikipedia. (2006). "*Atomismo Enciclopedia*". (URL: <http://enciclopedia.cc/Atomismo>). Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- [16.17] Wikipedia. (2006). "*Leucipo de Mileto*". (URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Leucipo_de_Mileto). Fecha de consulta: Octubre del 2006.
- [17] Forcada Quezada, I. (2006). "*Características de esfuerzo-deformación del concreto*". (URL: <http://www.construaprende.com/tesis01/121-concreto/1212-caracteristicas-de-esfuer.html>). Tesis sobre Concreto Presforzado. Escuela Nacional de Estudios Superiores, Acatlán. UNAM. México. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.
- [18] Álvarez Vázquez, J. A.; Freyre González, J. A.; Rivera López, R. (1999). "*Breve historia de la Lógica*". (URL: <http://w3.mor.itesm.mx/~logica/log9908/logica/historia/historia.html>). Instituto

Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Campus Morelos. México.
Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[19] Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. (2006). *“El aporte del Enfoque de Sistemas a la Ciencia”*. (URL: <http://galeon.com/tgs7233/aporte.htm>). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[20] Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco. (2005). *“Monografía de Teoría General de Sistemas”*. (URL: http://html.rincondelvago.com/tgs_5.html#). Perú.
Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[21] (URL: http://www.architectum.edu.mx/nuevositio/contenido/glosario/glos_mo.htm). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[22] Red Escolar Nacional (RENa). (2005). *“El aprendizaje”*. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Gobierno Bolivariano de Venezuela”.
(URL: <http://www.rena.edu.ve/cuartaEtapa/psicologia/Tema9.html>). Venezuela. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[23] *“Glosario de términos utilizados en EAD”*. (URL: http://www.uv.mx/edu_dist/glos.htm#E). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[24] Cruz Cruz, J. (1991). *“Apetito”*.
(URL: http://www.canalsocial.net/GER/ficha_GER.asp?id=9631&cat=medicina). Ediciones Rialp S.A. Gran Enciclopedia Rialp. España. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[25] Vila, Y. (2004). *“Leyes de la percepción”*. (URL: <http://www.alipso.com/monografias2/EEpZZZIElulEWmGRIO.shtml>). Instituto Pbro. Dr. A. M. Sáenz. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[26.1] Wikipedia. La enciclopedia libre. (2006). *“Perenne”*. (URL: <http://es.wikipedia.org/wiki/Perenne>). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[26.2] Wilber, K. (2006). *“Filosofía Perenne”*. (URL: <http://www.transpersonals.com/links/KenWilberTranspersonal.htm>). Escuela Sudamericana de Psicología Transpersonal. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[27] Wikipedia. La enciclopedia libre. (2006). *“Fonética Articulatoria”*. (URL: <http://es.wikipedia.org/wiki/Fon%C3%A9tica>). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[28] (2006). *“Aristóteles”*. (URL: http://sauce.pntic.mec.es/~iarr0002/index_archivos/filosofia%20II/aristoteles.htm). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[29] Fernández Piedrahita, I. “*Capítulo tres: Representando el conocimiento en la mente*”. (URL: http://pam.upsa.es/documentos/pdf/ifernandezpiedrafita_repre.pdf). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[30] Boticario, J. G. (2001). “*Redes*”. (URL: <http://www.ia.uned.es/~jgb/docencia/ia-ic/tema03/t03-3.html>). Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). España. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[31] Castillo Quiel, Y. (2006). “*Aprendizaje de la lectoescritura utilizando multimedia e Internet. Caso Práctico: El Método Ecléctico*”. (URL: <http://www.virtualeduca.org/virtualeduca/virtual/actas2002/actas02/271.pdf>). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[32] Valerio, M. (2006). “*A Imortalidade da Alma no Fédon Platônico. Uma introdução ao conceito da META-CONTINUIDADE MENTAL. A Continuidade da Mente além de nosso Horizonte Existencial*”. (URL: <http://www.xr.pro.br/MONOGRAFIAS/MCM1-FEDON.HTML>). Universidade de Brasilia. Brasil. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[33] Picollo, A. (2006). “*Criterios de curación y objetivos terapéuticos en el psicoanálisis. Escuela inglesa*”. (URL: <http://www.elpsicoanalisis.org.ar/numero2/picollo2.htm>). Revista "Psicoanálisis: ayer y hoy". Asociación Escuela Argentina de Psicoterapia para Graduados. Argentina. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[34] Velásquez Gallardo, O. (2006). “*Ideas griegas sobre el alma y la divinidad: un análisis de la doctrina aristotélica*”. (URL: <http://www.diadokhe.cl/paginas/aristo.html>). ARS Médica. Revista de Estudios Médicos y Humanísticos. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[35] Sosa, A. (2004). “*Semiótica para Dummies*”. (URL: http://www.nolimit-studio.com/yosoysosa/archives/categorias/articulos/semiotica_para_dummies.php). Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[36] Universidad del Quíndio. (2006). “*Organización de estructuras curriculares*”. (URL: <http://blade1.uniquindio.edu.co/uniquindio/facultades/medicina/medicina/plan2004.php>). Colombia. Fecha de consulta: Noviembre de 2006.

[37] Marty, R. (1999). “*Semiósis*”. (URL: <http://robert.marty.perso.cegetel.net/semiotique/preg60.htm> <http://robert.marty.perso.cegetel.net/semiotique/preg61.htm>). Francia. Fecha de consulta: Enero de 2007.

Anexo I

El pensamiento atomista y la Monadología

A.1.1 El pensamiento atomista de Leucipo y Demócrito ^[16.1 a 16.17]

a) *El ser y el no-ser*

Leucipo y Demócrito sostuvieron que los principios básicos de la materia son "lo lleno" y "lo vacío", a los cuales llamaron "ser" y "no ser", respectivamente. El **ser**, desgarrado por el vacío, se divide en una pluralidad de partículas elementales, cuya característica fundamental es su indivisibilidad; por tanto, la realidad material está compuesta de partículas indivisibles y de vacío: es decir, de átomos y vacío.

b) *Definición de átomo*

El átomo (*τομοι*, s. *τομος*, *lo que no puede ser dividido*) se definía como el elemento más pequeño, invisible, compacto, inmutable e indestructible; se consideraban partículas indivisibles carentes de cualidades, infinitos en número y forma e imperecederos, de los cuales están hechas todas las cosas.

c) *Características del átomo:*

- *Su capacidad de movimiento:* Los atomistas defendieron la existencia de movimiento pues creyeron en la existencia de vacío entre los átomos, con lo que éstos podrían moverse y enlazarse entre sí de diversos modos. Los átomos se mueven según leyes naturales cognoscibles generando múltiples choques en el infinito vacío, con lo que se producen agregaciones que dan lugar a los mundos y a los diversos seres vivos.
- *Su capacidad de agregación:* Los átomos no se diferencian unos de otros por rasgos cualitativos sino por dimensiones cuantitativas y geométricas: según nos cuenta Aristóteles, Demócrito consideró que las únicas diferencias existentes entre los átomos son la cantidad, la forma (en el sentido geométrico), y la posición relativa en el interior del cuerpo.

d) *La formación de la materia*

El filósofo Simplicio nos transmite este fragmento de las obras de Demócrito:

"... estos átomos se mueven en el vacío infinito, separados unos de otros y diferentes entre sí en figuras, tamaños, posición y orden; al sorprenderse unos a otros colisionan y algunos son expulsados mediante sacudidas al azar en cualquier dirección, mientras que otros, entrelazándose mutuamente en consonancia con la congruencia de sus

figuras, tamaños, posiciones y ordenamientos, se mantienen unidos y así originan el nacimiento de los cuerpos compuestos."

Para Demócrito, los átomos son los elementos fundamentales de los que está compuesto todo lo visible y lo invisible; incluso nuestra alma y los dioses. La destrucción y la muerte consisten en la separación de los átomos agregados.

e) *La diversidad de la materia*

Todo cuerpo no es sino una agregación de átomos. ¿Cómo explicar la pluralidad y diversidad de los seres reales?; los cuerpos deben sus diferencias a dos causas. Una, derivada de la misma estructura de los átomos, ya que éstos se diferencian entre sí por el tamaño y la forma. Otra, a las relaciones de los átomos entre sí en el seno de los cuerpos. En efecto, la unión de átomos del mismo tamaño y forma pueden dar lugar a cuerpos distintos, según el orden de colocación (taxis) y la posición (tesis) de los mismos. Aristóteles ilustra esta cuestión tomando como átomos las letras del alfabeto. La unión de dos átomos, A y N, puede dar lugar a diversos cuerpos, a causa del orden de colocación (AN o NA).

Los mundos surgen a partir de los torbellinos a que se ven arrastrados los átomos como consecuencia de choques previos (los átomos están en permanente movimiento desde la eternidad). Uniéndose unos con otros según sus formas se disponen en el seno del vacío y dan lugar a los infinitos mundos. La multiplicidad de los objetos cósmicos es una necesidad derivada del número infinito de átomos existentes: si han dado origen a cuerpos celestes como los visibles a simple vista, debe existir un número infinito de ellos al ser infinitos los elementos constitutivos disponibles, e infinito el vacío en el que se hallan.

f) *La inexistencia de una inteligencia superior*

En este universo infinito de átomos y vacío, no hay lugar para una inteligencia ordenadora o motor exterior como el **Nôus** de Anaxágoras, ni tampoco para un alma entendida como una realidad **ontológicamente** diferente a la materia. Los atomistas negaban la teoría según la cual el universo se regía por una inteligencia o divinidad exterior al mismo; la inteligencia la apreciaban mucho, pero no como una fuerza cósmica, sino como una categoría humana.

Es destacable la ausencia de cualquier connotación **teleológica** en el texto de Demócrito, al igual que la presencia de una inteligencia ordenadora en todo el proceso **cosmogónico**.

Es bastante interesante este último aspecto, debido a la manera en cómo se concibe la constitución del universo (y por que no decirlo, de cómo se encuentra articulado), dentro de la corriente filosófica del atomismo de Demócrito, y en general, del pensamiento mecanicista: se niega rotundamente la existencia e intervención de una mente superior, que realiza el proceso de la articulación del universo. Esto es debido

a que la noción del azar es predominante, lo cual lleva a suponer que sería innecesaria la existencia de tal inteligencia; así se observa en la exposición siguiente:

“El mecanicismo implica la referencia a la necesidad en los acontecimientos o sucesos naturales y a la ausencia de finalidad o intención de los mismos (por lo tanto a la presencia del azar). Hay que tener cuidado porque en este contexto azar no se contrapone a necesidad, sino a falta de finalidad o intención. Un suceso puede ser azaroso en el sentido de que nadie lo ha previsto, de que ocurre sin que sea consecuencia de un plan o intención, pero sin embargo ser un acontecimiento necesario en el sentido de que dadas las leyes de la naturaleza, y debido a la situación y composición de las circunstancias, inevitablemente debía ocurrir.”^[6]

A.1.2 La Monadología de Leibnitz ^[10]

a) *Definición de mónada:*

“La mónada, de que vamos a hablar en este tratado, no es sino una sustancia simple, que entra a formar los compuestos; simple quiere decir sin partes. Ahora bien, donde no hay partes, no puede haber ni extensión, ni figura, ni divisibilidad. Y las tales mónadas son los verdaderos átomos de la naturaleza y, en una palabra, los elementos de las cosas.”

b) *Razón de ser de las mónadas:*

“Tiene que haber substancias simples, puesto que hay compuestas; pues lo compuesto no es más que un montón, o aggregatum, de simples.

...Así, los matemáticos reducen por análisis los teoremas especulativos y los cánones prácticos a las definiciones, axiomas y postulados. Y hay, por último, ideas simples, cuya definición no puede darse; también hay axiomas y postulados o, en una palabra, principios primitivos, que no pueden ser demostrados y no lo necesitan; son enunciados idénticos, cuya oposición encierra una contradicción expresa.”

c) *El origen de las mónadas:*

“Así, pues, Dios sólo es la unidad primitiva o sustancia simple originaria, y todas las mónadas creadas o derivativas son producciones tuyas, y nacen, por decirlo así, por fulguraciones continuas de la Divinidad de momento en momento, limitadas por la receptividad de la criatura, a la cual pertenece esencialmente el ser limitado.

*Hay en Dios potencia, que es como la fuente de todo; luego conocimiento, que encierra el detalle de las ideas, y, por último, voluntad, que efectúa los cambios o producciones, según el principio de lo mejor. Y esto responde a lo que, en las mónadas creadas, constituye el sujeto o base, la **facultad perceptiva** y la **facultad apetitiva**. Pero en Dios esos atributos son absolutamente infinitos o perfectos; y en las mónadas creadas o en las **entelequias** (o perfectibles, que así traducía este vocablo Hermolao Bárbaro), no son sino imitaciones de Dios, según la perfección que tienen.”*

d) *Características de las mónadas:*

“Sin embargo, es preciso que las mónadas tengan algunas cualidades, pues de lo contrario no serían ni siquiera seres. Y si las substancias simples no difirieran por sus cualidades, no habría medio de apercebirse de ningún cambio en las cosas; puesto que lo que hay en el compuesto no puede proceder sino de los ingredientes simples; y si las mónadas careciesen de cualidades, serían indistinguibles unas de otras, ya que, en cantidad, no difieren; y, por consiguiente, supuesto lo lleno, un lugar cualquiera no recibiría nunca, en el movimiento, sino lo equivalente de lo que había tenido, y un estado de las cosas sería indiscernible de otro.

Podría darse el nombre de entelequia a todas las sustancias simples o mónadas creadas, pues tienen en sí mismas cierta perfección, y hay en ellas una suficiencia que las hace fuente de sus acciones internas y, por decirlo así, autómatas incorpóreos.”

e) *Interconexión entre las mónadas:*

“Pero, en las sustancias simples, no hay sino una influencia ideal de una mónada sobre otra, lo cual no puede tener efecto a no ser por intervención de Dios, en cuanto que, en las ideas de Dios, una mónada solicita, con razón, que Dios, al regular las demás, desde el comienzo de las cosas, la tenga en cuenta. En efecto, puesto que una mónada creada no puede tener influencia física en el interior de otra, sólo por aquel medio podrá haber dependencia de una a otra. Y por esto, entre las criaturas, las acciones y pasiones son mutuas. Pues Dios, comparando dos sustancias simples, halla en cada una de ellas razones que le obligan a acomodar la otra a la primera; y, por consiguiente, lo que en ciertos respectos es activo, es pasivo visto desde otro punto de vista: activo, en cuanto que lo que se conoce distintamente en ello sirve para dar razón de lo que sucede en otro, y pasivo, en cuanto que la razón de lo que en ello sucede se encuentra en lo que se conoce distintamente en otro.”

f) *La conformación del universo conocido, en base a las mónadas:*

“Ahora bien, habiendo una infinidad de mundos posibles en las ideas de Dios, y no pudiendo existir más que uno solo, se precisa que haya una razón suficiente de la elección de Dios que le determine a éste mejor que a aquél. Y esta razón no puede hallarse sino en la conveniencia o en los grados de perfección que contengan esos mundos. Y ésta es la causa de que exista lo mejor; la sabiduría de Dios lo conoce, su bondad lo elige y su poder lo produce.

Y así como una misma ciudad, vista por diferentes partes, parece otra y resulta como multiplicada en perspectiva, así también sucede que, por la multitud infinita de substancias simples, hay como otros tantos universos diferentes, los cuales no son, sin embargo, sino perspectivas de uno solo, según los diferentes puntos de vista de cada mónada. Y esta es la manera de conseguir la mayor variedad posible con el mayor orden posible.” .

g) *El comportamiento recursivo del universo:*

“Porque Dios, al arreglarlo todo, ha tenido en cuenta cada parte, y especialmente cada mónada, cuya naturaleza, siendo representativa, no podría nada limitarla a representar sólo una parte de las cosas, aunque es verdad que esta representación es solamente confusa en el detalle de todo el Universo y no puede ser distinta sino en una pequeña parte de las cosas, es decir, en aquellas que son las más próximas o las más grandes, con respecto a cada mónada; que, si no, cada mónada sería una Divinidad. No en el objeto, sino en la modificación del conocimiento del objeto son limitadas las mónadas. Todas, confusamente, van al infinito, al todo; pero son limitadas y distinguidas por los grados de las percepciones distintas.”

Anexo II

Elementos de la Lógica formal

A.2.1 Diversos aspectos de la Lógica formal

a) La formación de los conceptos según la lógica formal

En el análisis del fenómeno de la adquisición del conocimiento se han distinguido cuatro elementos, de los cuales es de interés en este momento el de las representaciones internas. Prosiguiendo ahora el análisis sobre este elemento, se mencionará que existen dos tipos de representaciones internas, muy diferentes las unas de las otras, y completamente irreductibles. Los dos tipos de representaciones internas son:

- Representaciones sensibles (también llamadas imágenes)
- Representaciones intelectuales (denominadas pensamientos)

b) Las representaciones sensibles

Para explicar a que se refieren las representaciones sensibles o imágenes, se aportará un ejemplo: Si se le muestra a un niño un reloj de pulsera, el niño lo puede ver y formarse en su interior la imagen (o representación sensible) de ese reloj. Igualmente, si se le muestra un reloj-despertador, el niño forma la imagen correspondiente. Lo mismo sucede cuando se le muestra un reloj de arena y un reloj de sol. Todos estos relojes tienen una forma muy diferente, y el niño es capaz de captar su correspondiente imagen concreta. El hecho de que los sujetos posean facultades sensibles, como la vista y el oído, los capacita para captar representaciones sensibles. Además, es de notarse que la propiedad más importante es que cada imagen es singular, o sea, se refiere a un solo objeto bien determinado. La imagen del reloj-despertador sirve para representar a ese reloj-despertador, pero no al reloj-pulsera, aunque los dos sean relojes.

Derivado del anterior análisis, se tienen las características propias de las representaciones sensibles:

- Es captada por medio de los sentidos
- Es singular (se refiere a un solo objeto)
- Se llama también imagen (en cuanto que es reproducida por la imaginación)

Las imágenes conforman un caudal muy rico y variado; representan objetos de diferentes colores, tamaños, proporciones y figuras. Contienen datos particulares, concretos, pertenecientes a un objeto determinado. Además, se pueden combinar entre sí. También es posible tener representaciones sensibles percibidas por otros

sentidos, como el oído, el olfato o el tacto, y que podemos recordar y combinar como en el caso de las imágenes visuales (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.55-59).

c) Las representaciones intelectuales

Prosiguiendo con el mismo ejemplo, se notará que todos los relojes, aún al ser tan diferentes externamente, tienen algo en común, lo cual permite formar una nueva representación que los abarque a todos por igual. En efecto, todos esos relojes son “aparatos para medir el tiempo”. Pues bien, cuando se piensa en el significado de esta frase, se tiene en la mente la representación intelectual de reloj. Dicho de otro modo: el hombre es capaz de abarcar todos los seres de la misma especie (como los relojes) con un solo pensamiento que los identifica a todos ellos por igual. Si se piensa en “reloj”, se está representando a todos esos aparatos ya descritos; pero naturalmente, sin tomar en cuenta las características que los distinguen entre sí (como el color, el tamaño, la figura externa), sino sólo aquello que tienen en común (la esencia), como en este caso, el hecho de ser “aparatos para medir el tiempo”.

Con este ejemplo en concreto se puede captar qué es lo típico de las representaciones intelectuales, a saber, su universalidad, o sea, el hecho de referirse por igual a una serie de objetos que presentan alguna característica en común. Mientras que las representaciones sensibles son singulares, las representaciones intelectuales son universales.

Se podría continuar la diferenciación de ambos tipos de representaciones notando que las facultades sensibles ya son completamente ineficaces para captar las representaciones intelectuales. ¿Con qué facultad se capta, por ejemplo, que la virtud es un hábito bueno? Ciertamente no es ni la vista, ni el oído ni alguno de los cinco sentidos. Estos sólo sirven para captar las palabras con que se expresa este pensamiento; pero su significado queda por encima de esas palabras. Ese significado o pensamiento se percibe con una facultad superior, llamada entendimiento o inteligencia. Por tal razón estas representaciones se denominan intelectuales, a diferencia de las sensibles que son captadas por los sentidos.

Por todo lo anterior, es posible especificar las características de las representaciones intelectuales:

- Son universales, aplicables a todos los seres que presentan alguna característica en común.
- Se captan por la inteligencia, de tal manera que los sentidos son ciegos para el contenido captado por el entendimiento, que se mueve, indudablemente, en un plano superior.
- Son representaciones intelectuales, también llamadas pensamientos (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.55-59).

Para concluir con esta parte, se puede comentar que simultánea o posteriormente a la imagen, el sujeto puede captar pensamientos correspondientes al mismo objeto. Para obtener una idea se necesita siempre un sustentáculo de tipo sensible. Esto tiene incalculables aplicaciones en el terreno de la enseñanza; su ley de oro es que primero hay que dar imágenes, y sólo con ese material sensible puede el alumno obtener el concepto correspondiente. De ahí la necesidad del material didáctico, del uso del pizarrón, de ejemplos gráficos. Los mejores profesores son los que pintan con sus palabras el material sensible que captan sus alumnos casi sin esfuerzo y luego inducen a estos a obtener las ideas ahí contenidas. Una clase sin ejemplos concretos revela una ausencia absoluta del método pedagógico (Gutiérrez Sáenz, 1981, pp.65).

d) La transición de las representaciones sensibles a las intelectuales

A pesar de que este tema es propio de la Psicología, es conveniente explicar aquí (aunque sea someramente) el procedimiento mental que da lugar a las ideas.

El sujeto cognoscente, después de captar un objeto por medio de las facultades sensibles, penetra con la inteligencia hasta un plano más profundo del mismo objeto y descubre allí un contenido inteligible, una estructura necesaria, un sentido del objeto. Coincide esto con lo que generalmente se llama entender. Por ejemplo: Un estudiante capta una demostración matemática; la puede repetir con sus propias palabras, sin necesidad de pronunciar al pie de la letra esa demostración tal como viene en el libro. Es que su mente ha captado el contenido inteligible allí encerrado. Llegar hasta el significado (más o menos profundo) o a la estructura esencial y necesaria de un objeto que primero se ha presentado a los sentidos, es realizar esta operación mental llamada simple aprehensión.

La simple aprehensión consiste en el paso de la imagen a la idea. No quedarse en la contemplación de la imagen sensible, sino tratar de descubrir algo en el fondo de ella; eso es aprehender o **abstraer**. La palabra aprehender nos indica que se trata de una captura, de un acto de captar, pero por supuesto, en un plano mental. No es una operación sencilla; en muchas ocasiones consiste en entender algo difícil. Esta operación es realizada en un solo acto, sin partes. Es decir, o se capta algo o no se capta. Y la captación suele ser de golpe, a veces irrumpiendo estruendosamente. Es lo que se expresa cuando se dice de pronto: “tengo una idea”.

Por lo tanto, es posible ofrecer en este punto una primera definición sobre ésta operación mental: la simple aprehensión es la operación mental por la cual un sujeto capta un elemento necesario del objeto, es decir, una idea. La simple aprehensión es, pues, lo mismo que concebir una idea (o conceptuar). También se llama intuición, queriendo indicar que el hombre capta, en un objeto material, su significado profundo, que está allí latente, pero oculto a los sentidos (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp.65, 67-70).

e) Características generales de los conceptos, según la lógica

Algunas de las características más esenciales de los conceptos, son las siguientes:

- Se trata de una representación. Es decir, es un modo de tener presente en la inteligencia el objeto dado. Por supuesto, no hay que confundir esta representación con la simple imagen. La idea no se puede imaginar; sus características carecen de color, tamaño, figura (recuérdese lo dicho al respecto sobre representaciones sensibles e intelectuales). Si la palabra representación indujera a confusiones, podría cambiarse por la de expresión, contenido o significado.
- El concepto es una representación mental. Con esto se indica que es la inteligencia la facultad que lo capta. Ya se ha hablado de cómo se realiza la primera operación mental, y cómo da por resultado un concepto a partir de los datos sensibles proporcionados por el primer contacto con el objeto.
- El concepto no afirma o niega nada acerca del objeto. En efecto, una idea denota, expresa, significa mentalmente un objeto, pero de un modo neutro, sin afirmar (o negar) la existencia real de tal contenido, y sin afirmar o negar tampoco que “algo es”.

Por todo esto, la idea es el elemento o célula más simple dentro de nuestra organización interna de pensamientos. La idea o concepto está hecha para componer el pensamiento central que es el juicio, el cual afirma o niega algo. Cada vez que se capta el sentido de un objeto, se tiene una idea. Nótese que una palabra cualquiera suele expresar una idea; pero también se podría quedar en la pura imagen, cuando se pronuncia esa misma palabra. Así, por ejemplo si se menciona el término esfera, un matemático podría pensar inmediatamente en un volumen con todos los puntos de su superficie equidistantes del centro; pero ante la misma palabra, un niño tal vez, sólo se quede con la imagen singular de una esfera específica (por ejemplo, un globo terráqueo) (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 71 y 72).

f) La definición descriptiva del concepto y sus reglas

Definir quiere decir delimitar (del latín: *definire*), poner límites. Por tanto, una definición es la expresión de lo que es un objeto, sin añadirle ni quitarle nada. En otras palabras, nuestros conceptos se refieren a ciertos objetos; y explicitar con exactitud a qué tipo de objetos se refieren tales conceptos es lo mismo que definir. Saberlos desarrollar con exactitud y fidelidad, sin que falten o sobren notas esenciales, es saber definirlo. Una definición bien hecha es una muestra de pensamiento correcto.

La utilidad de una buena definición reside principalmente en que con ella se elimina la ambigüedad del vocabulario, haciendo posible la uniformidad de pensamiento y de conclusiones en las diversas mentes que investigan un asunto. Sin la previa definición se corre siempre el riesgo de estar hablando de aspectos diferentes con las mismas palabras (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp: 109 y 110).

Desde el punto de vista de la lógica, existen varios tipos de definición. La que nos interesa en este punto es la definición real, la cual se describirá a continuación:

La definición real es el tipo de definición que nos puede llevar con exactitud y rigor al fin deseado. La definición real se refiere a la cosa u objeto significado (del latín: *res*, cosa). El procedimiento más frecuente que lleva a cabo es una simple enumeración de las propiedades más típicas del objeto por definir. El resultado se llama definición descriptiva (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp: 110).

Para ayudar en el proceso de definir conceptos, la Lógica ha formulado las siguientes reglas, cuya aplicación facilita la obtención de buenas definiciones:

PRIMERA REGLA: La definición debe ser breve, pero completa. Es decir, debe explicitar lo indispensable para que la comprensión sea exacta, sin que falten o sobren notas constitutivas; y todo esto con brevedad. Sin embargo, no por buscar la brevedad se pierda la exactitud.

SEGUNDA REGLA: La definición debe convenir a todo lo definido y a sólo lo definido. En otras palabras, no debe ser ni demasiado amplia ni demasiado estrecha su extensión. Esta regla es correlativa de la anterior, pues si el concepto se define con exceso de notas su extensión se reduce, y viceversa.

TERCERA REGLA: La definición debe ser más clara que lo definido. Sólo así se consigue el fin que se pretende. La definición elaborada con palabras ambiguas, metafóricas o de significado igualmente desconocido, resultan vanas. Sin embargo, en algunas ocasiones, con una breve explicación del lenguaje empleado sería suficiente para aceptar definiciones a base de tecnicismos.

CUARTA REGLA: Lo definido no debe entrar en la definición. Con esta regla se quiere evitar uno de los defectos más comunes en la elaboración de definiciones. Se debe tener cuidado de no utilizar en la definición la misma palabra que se pretende definir. En algunos casos, tampoco habría que utilizar derivados gramaticales de lo definido. Faltar a esta regla equivale a no definir ni aclarar el significado del concepto propuesto.

QUINTA REGLA: La definición no debe ser negativa. En lo posible la definición debe decir lo que es, debe aclarar el contenido de un concepto, y no lo que queda excluido de tal concepto. En algunas ocasiones, en las cuales es prácticamente imposible decir de qué se trata el concepto, sólo cabría entonces una eliminación de notas, dada la oscuridad que encierra esa noción.

SEXTA REGLA: La definición debe indicar los atributos esenciales del objeto. Esto quiere decir que, o bien, se señalan el género próximo y la diferencia específica que constituyen la esencia tratada, o, por lo menos, se ponen en claro las propiedades que necesariamente posee el objeto definido.

Siguiendo estas reglas, se facilita el pensamiento correcto al nivel del concepto. De otra manera puede suceder que una frase que pasa como definición, aun cuando exprese cualidades muy reales de lo definido, sea incorrecta como definición. (Gutiérrez Sáenz, 2004, pp. 111,112).

Glosario

Abstraer

Separar las cualidades de un objeto para considerarlas aisladas mentalmente o no, o para considerar el mismo objeto en su pura esencia o noción (Diccionario Océano Uno, 1992).

Articulaciones

Enlace de dos piezas de una maquina o instrumento (Diccionario Océano Uno, 1992).

Atingentes

Que se encuentran conectados; relación de una cosa con otra (Diccionario Océano Uno, 1992).

Autómatas

Aparato dotado de un mecanismo que le imprime movimientos. Máquina que imita los movimientos de un ser animado (Diccionario Océano Uno, 1992).

Cibernética

Ciencia que se basa en el principio de la retroalimentación (o causalidad circular) y de homeóstasis; explica los mecanismos de control y comunicación en las máquinas y los seres vivos que ayudan a comprender los comportamientos generados por estos sistemas que se caracterizan por sus propósitos, motivados por la búsqueda de algún objetivo, con capacidades de auto-organización y de auto-control (Bertoglio, 1986, p. 29).

Cognoscente

Dícese de lo que es capaz de conocer (Diccionario Océano Uno, 1992).

Cosmogónico

Relativo a la parte de la astronomía que estudia la formación y origen del universo (Diccionario Océano Uno, 1992).

Deformaciones elásticas

Es la porción inferior de la curva esfuerzo-deformación instantánea para el concreto, la cual es relativamente una recta, y a la cual se le llama convencionalmente, elástica.[17]

Desarrollo axiomático

Se basa en el método axiomático de Euclides, presentado en sus "Elementos". Euclides organiza pruebas deductivas dentro de una presentación sistemática, rigurosa y bien organizada de conocimiento matemático. [18]

Desustanciación

Quitar la fuerza a una cosa (Diccionario Océano Uno, 1992).

Dialéctica

En sentido general, arte de razonar o de analizar la realidad. Ha sido concebida de forma distinta a lo largo de la historia de la filosofía. Para Platón, fue el método de alcanzar la unidad de lo inteligible a partir de la multiplicidad de lo sensible. Para Aristóteles, la dialéctica sólo hace referencia a la parte del saber que no es susceptible de certidumbre, sino sólo de probabilidad basada en la apariencia. Santo Tomás la situó como parte de la lógica y Kant retornó a la posición aristotélica. Hegel fue el gran filósofo de la dialéctica a la que consideró como expresión del desarrollo mismo del pensamiento. Marx adoptó de Hegel las tres grandes leyes de la dialéctica: negación de la negación, paso de la cantidad a la cualidad y unidad de los opuestos. Sastre dedicó parte importante de su obra a la crítica de la razón dialéctica (Diccionario Océano Uno, 1992).

Didáctica

Ciencia que estudia la metodología de la enseñanza (Diccionario Océano Uno, 1992).

Enfoque analítico

Se basa en tomar un problema difícil y concentra sus esfuerzos para su resolución a partir de descomponer, conceptual y/o físicamente, sus partes hasta tanto pueda ofrecer una respuesta al problema. Este enfoque es adecuado cuando el problema planteado obedece a una realidad perfectamente definida y estructurada. El método de la ciencia es esencialmente analítico. [19]

Enfoque de sistemas

Es la posibilidad de manejar la complejidad, de tratar la totalidad, de sintetizar a partir de los elementos un sistema en la visión del observador, para ofrecer una solución. [19]

Enfoque reduccionista

Estudia un fenómeno complejo a través del análisis de sus elementos o partes componentes. En este enfoque se trata de explicar a las ciencias o sistemas, para su mejor entendimiento, en dividirlos a un grado tan elemental, separándolos de tal modo que faciliten su estudio a un nivel muy especializado. [20]

Entelequias

Cosa real que lleva en sí el principio de su acción y que tiende por si misma a su fin propio (Diccionario Océano Uno, 1992).

Epistemología

Estudio crítico del conocimiento científico. A veces se emplea esta expresión para designar la teoría del conocimiento (Diccionario Océano Uno, 1992).

Estructuras cognoscitivas

Son los conocimientos que en un momento determinado posee un individuo acerca del ambiente y están constituidos por conceptos, categorizaciones, principios y generalizaciones. [22]

Experiencias de aprendizaje

Acciones que realiza un docente para crear un ambiente propicio para facilitar el aprendizaje del o los estudiantes. El diseño de experiencias de aprendizaje es una actividad que no es fácil de planear, pues se requieren conocimientos de didáctica y de teorías del aprendizaje. [23]

Extramental

Fenómenos o sucesos que suceden fuera del ámbito de la mente (Gutiérrez Sáenz, 2004).

Facultad apetitiva

Según Aristóteles, en su concepción del compuesto humano, alma y cuerpo entran como forma y materia. Según él, con el conocimiento sensitivo se da una facultad apetitiva: esta tiende hacia aquello que causa placer o satisface y rehuye lo que le pueda causar dolor. [24]

Facultad perceptiva

Es la capacidad del hombre de ser capaz de interpretar los datos sensoriales e integrarlos en la conciencia. En psicología, la facultad perceptiva se denomina al proceso por el que la conciencia integra las impresiones sensoriales sobre objetos, acontecimientos o situaciones. [25]

Filosofía perenne (philosophia perennis)

Teoría filosófica fundada en la recolección o generalización de ideas comúnmente aceptadas en todas las épocas conocidas. Es esta visión del mundo que comparten la mayor parte de los principales maestros espirituales, filósofos, pensadores e incluso científicos del mundo entero. Se la denomina “perenne” o “universal” porque aparece implícitamente en todas las culturas del planeta y en todas las épocas. Y dondequiera que se le halla, presenta siempre los mismos rasgos fundamentales: es un acuerdo universal en lo esencial. [26.1, 2]

Fonemas

En fonética, son cada uno de los sonidos articulados de una lengua. Se considera la más pequeña unidad fonológica de una lengua (Diccionario Océano Uno, 1992).

Fonética Articulatoria

Es la que estudia los sonidos de una lengua desde el punto de vista fisiológico; es decir, describe qué órganos orales intervienen en su producción, en qué posición se encuentran y cómo esas posiciones varían los distintos caminos que puede seguir el aire cuando sale por la boca, nariz, o garganta, para que se produzcan sonidos diferentes. No se ocupa de todas las actividades que intervienen en la producción de un sonido, sino que selecciona sólo las que tienen que ver con el lugar y la forma de articulación. [27]

Forma sustancial aristotélica

Para Aristóteles, toda sustancia primera (cuerpos, seres concretos e individuales) está constituida por dos principios básicos: materia primera y forma sustancial. A esta teoría se le llama hilemorfismo. La materia (hylé) es el "sujeto primero de cada cosa, del cual como elemento inmanente y no material es generada". Se trata, pues, del sustrato básico constitutivo de todos los cuerpos. No es una cosa en concreto, aunque puede llegar a serlo: es pura potencia, no acto. La forma (morfé) es el elemento específico que actualiza la materia primera, dando lugar a tal o cual especie de ser: es acto. En algunos escritos, Aristóteles identifica la forma con la esencia, con la sustancia segunda (el árbol es árbol porque posee tal forma específica y no la de perro o de piedra). [28]

Gráficas jerárquicas

En el contexto de las redes semánticas, son representaciones gráficas de estructuras, formadas por nodos y líneas interconectadas. Los nodos representan categorías de información, para evitar redundancia y posibilitar una manipulación cognitiva efectiva. Dichos nodos quedan vinculados por líneas o flechas. [29]

Grafos proposicionales o redes proposicionales

En éste tipo de redes asociativas, cada nodo representa un concepto o una proposición y los enlaces corresponden generalmente a relaciones de inclusión, pertenencia, causalidad, o a categorías gramaticales, como verbo principal, sujeto, objeto, complementos, etc. Tipos específicos de redes proposicionales son las redes de Shapiro y los grafos de Sowa. [30]

Inteligible

Que puede ser entendido. Dícese de lo que es materia de puro conocimiento, sin intervención de los sentidos (Diccionario Océano Uno, 1992).

Intramental

Fenómenos o sucesos que acontecen dentro de ámbito de la mente (Gutiérrez Sáenz, 2004).

Metafísica

Estudio del ser en cuanto tal y de sus propiedades, principios y causas primarias. Como ciencia de los primeros principios y de las causas primeras del ser, la metafísica también ha recibido el nombre de filosofía primera. A lo largo de la historia

de la filosofía, muchos autores han rechazado la posibilidad de todo conocimiento metafísico. En la antigüedad el rechazo lo formularon los escépticos, y en la E. Mod. Los empiristas (especialmente Hume), pero fue Kant quién sometió la metafísica a la más rigurosa crítica. En el siglo XIX las críticas a la metafísica partieron del positivismo y del marxismo (Diccionario Océano Uno, 1992).

La parte más importante de la Filosofía. Su tema es el ser en cuanto a tal. Ser es lo mismo que realidad. La máxima dificultad de metafísica es la captación del ser distorsionado. Generalmente los conceptos acerca del ser dan un cierto sesgo que los distorsionan. El ser debe captarse por medio de una intuición que, al carecer de estructuras humanas, implica un mínimo de distorsión. Adviértase que también existe otra acepción muy diferente del término metafísica: se refiere a todo aquello que abarca lo espiritual, el alma, la otra vida, la comunicación con los espíritus, la existencia del alma en otras épocas y la reencarnación (Gutiérrez Sáenz, 2004, p. 336).

El nombre de metafísica, en su acepción actual, aparece por vez primera a fines del siglo V d.C. en el neoplatónico Simplicio. La ciencia por él designada había sido abordada sistemáticamente por Aristóteles ya en el siglo IV a.C. La ciencia de lo metafísico, es lo que se encuentra más allá de lo físico. El significado que los griegos atribuían a lo físico no coincide en modo alguno con el que hoy tiene esta palabra, sino que designa la totalidad de la realidad empírica corpórea en cuanto sometida al nacimiento y, en general, al devenir. Por consiguiente, se denomina metafísico lo esencialmente inexperimentable, inmutable y, en alguna manera, espiritual. Aristóteles la llama filosofía primera, porque se ocupa en lo que es primero; pues el ser y Dios son lo primero en el orden real, aquello de donde procede y por quien se sostiene todo lo demás. En la actualidad, materialistas y positivistas rechazan la metafísica. En la terminología del materialismo dialéctico, tanto "metafísica" como "metafísico" equivalen a una consideración antidialéctica de la naturaleza y enemiga por principio de todo cambio interior y evolutivo, lo que vendría a tener el sentido de "mecánico" y es ajeno al concepto de la metafísica clásica, que respeta su espacio a la physis. Heidegger trata de superar la metafísica en cuanto ésta, como ontología, se ha limitado a investigar el ente sin plantearse la cuestión ontológica fundamental acerca del ser; pero en dicha tarea menosprecia la dilucidación del mismo, que precisamente la metafísica tiene hace tiempo realizada, en especial por obra de santo Tomás de Aquino. En su última evolución Heidegger quiere desligarse más todavía de la metafísica. En lugar de la pregunta por el ser pone la pregunta por la diferencia ontológica y por el evento que acontece en ella. Jacques Derrida radicalizará esta intención de Heidegger. En el ámbito anglosajón la palabra metafísica significa ante todo la investigación de los fenómenos parapsicológicos. [21]

Método de mínimos cuadrados

Es un método numérico de aproximación, que consiste en el ajuste de una línea recta a un conjunto de parejas de datos (x, y) (Chapra y Canales, 1996, pp. 321).

Método ecléctico

Es un método de lectura y escritura, donde el sujeto construye su conocimiento. [31]

Monemas

Unidades significantes mínimas del lenguaje, que tienen a la vez una forma y un sentido. Ejemplo: los monemas de la palabra libro, pueden ser las sílabas li y bro (Mounin, 1974, p. 50).

Nocional

Conocimiento o idea que se tiene de una cosa. Conocimiento elemental (Diccionario Océano Uno, 1992).

Nôus de Anaxágoras

El término nôus que podría ser traducido como "mente", o a veces como "espíritu", posee claramente la implicación con la inteligencia. Es interesante hacer notar que la palabra "espíritu" en otras tradiciones designa exactamente a la "vitalidad" que anima a los seres vivos, siguiendo el ejemplo del "soplo de vida" bíblico. Así, los conceptos de alma y espíritu se confunden, y algunas veces son utilizados con connotaciones opuestas. [32]

Ontológicamente

Referente a la teoría acerca de lo que el mundo es, o contiene. Para mucha gente es una postura positivista; filosóficamente, genera hechos ontológicos relativos al mundo. Una postura filosófica se caracteriza por una prontitud a conceder primacía al mundo dado, como conocible mediante evidencia experimental, en contraste con una postura fenomenológica. Por su parte, una postura filosófica fenomenológica se caracteriza por una prontitud a conceder primacía a los procesos mentales de los observadores más que al mundo externo, en contraste con una postura positivista (Checkland, 1993, p. 354).

Operacionalizados

Método que inquiere no sólo el objeto que debe ser observado, sino también las operaciones realizadas por los observadores (Diccionario Océano Uno, 1992).

Proceso de pensamiento

Desde la perspectiva del psicoanálisis, para W. Bion, el proceso de desarrollo mental va acompañado siempre de la evolución del proceso del pensamiento. Éste último va asociado con un proceso que se acerca a más conocimiento; es decir, un proceso de pensamiento tiende a un mayor conocimiento y verdad. El conocimiento y la maduración mental son procesos que siguen el mismo camino. [33]

Psicología Cognitiva

Esta disciplina se interesa por la forma en que los organismos conocen (obtienen conocimiento acerca de) su mundo, y la manera en que emplean ese conocimiento para guiar decisiones y ejecutar acciones efectivas. Intenta comprender la "mente" y

sus habilidades o logros en percepción, aprendizaje, pensamiento, y en el uso del lenguaje (Bower y Hilgard, 2000, p. 521).

Psitacismo

Estado del espíritu en que uno habla sin saber lo que dice (Diccionario Océano Uno, 1992).

Razonamiento

Acción y efecto de razonar. Serie de conceptos encaminados a demostrar una cosa, o a persuadir o mover a oyentes o lectores. Raciocinio (Diccionario Océano Uno, 1992).

Realidad anímica

Según Aristóteles, en la existencia de los seres vivos existe aquello que se concibe como alma (realidad anímica), la cual se manifiesta por tres aspectos esenciales: “se define al alma por el movimiento, la sensación y la incorporeidad”. La realidad anímica está en íntima conexión con la vida, la conciencia, y el movimiento autónomo. [34]

Semiósis

Es un proceso que se desarrolla en la mente del intérprete; se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo. Es un proceso inferencial. Una inferencia es un acto de pensamiento que emplea un argumento. Es una operación de la mente a través de la cual se acepta que un nuevo símbolo represente un objeto, en virtud de su relación con otros símbolos conocidos que representan a ese mismo objeto. [37]

Ser

Ente, lo que es, existe o puede existir. Tema propio de la metafísica y se define de varias maneras: es el fundamento de todos los entes; es sinónimo de realidad; es el acto ejercido por todo ente. Participar del ser significa afirmarse como un ente, como algo distinto a la nada, como algo que existe o puede existir (Gutiérrez Sáenz, 2004, p. 338).

La problemática del ser constituye uno de los ejes centrales de la filosofía y ha dado origen a la ontología. Para Aristóteles el ser no es ni un género ni una especie, sino que es aplicable a todo y cada cosa tiene ser de alguna cosa. Para Kant el ser no es un predicado real, y para Hegel, la falta de determinación del ser lo aproxima y lo identifica con la nada. En Marx, el ser solamente es tal cuando se halla relacionado con un contexto. De la relación dialéctica entre el ser y su entorno, surge la actividad. La filosofía contemporánea tiende a vincular el ser con la existencia (Bergson, Sastre) (Diccionario Océano Uno, 1992).

Significado y significante

Un signo se compone de dos partes: el significante y el significado. El significante es el estímulo. Generalmente la parte más concreta, visual y/o palpable del signo (p. ej.

una palabra, un carácter, una seña, un dibujo, etc.). El significado es el concepto abstracto que se le atribuye o relaciona con un significante. (p.ej. los esquemas de un baño publico. La mente reconoce automáticamente cual es el que corresponde, es decir le atribuye un significado a cada uno de esos significantes). [35]

Signo lingüístico

Las características del signo lingüístico son: a) Linealidad: se refiere a que el signo lingüístico (las palabras) deben llevar un orden lineal (en forma de enunciado) y debe ser comprensible lo escrito; b) Arbitrariedad: es cuando el signo lingüístico (palabras) “cambia”, por ejemplo, la palabra casa cambia a house dependiendo el idioma, pero casa y house representan una misma imagen mental; c) Mutabilidad: el signo lingüístico que cambia con el tiempo; por ejemplo, la palabra amigo hoy se dice “cuate”; d) Inmutabilidad: el signo lingüístico que no cambia con el tiempo. La palabra amor desde hace veinte siglos sigue siendo amor; e) Articulación: desglosar las palabras en letras y así poder formar monemas y fonemas. [35]

Sistema curricular

El plan de estudios se organiza como un sistema abierto denominado Sistema Curricular, constituido por subsistemas en los que los espacios académicos, los escenarios, las prácticas, las metodologías y las estrategias se articulan para abordar el estudio sistémico de una disciplina científica específica, sus relaciones y conexiones con otras disciplinas también interconectadas. [36]

Teleológica

Referente a la teleología, que es la doctrina de las causas finales (Diccionario Océano Uno, 1992), en la que los desarrollos ocurren como resultado de los fines a que éstos sirven (más que como un resultado de causas anteriores) (Checkland. 1993, p. 357).

Teoría General de Sistemas (enfoque de sistemas)

Es una disciplina científica que investiga los conceptos, métodos y conocimientos pertenecientes a los campos y pensamiento de sistemas. Es un método de investigación, una forma de pensar, que enfatiza el sistema total, en vez de sistemas componentes; se esfuerza por optimizar la eficacia del sistema total en lugar de mejorar la eficiencia de sistemas cercanos (Van Gigch, 1993, pp. 25, 26, 50).

Termodinámica

Ciencia que estudia las relaciones entre la energía y los cambios físicos de origen térmico (Diccionario Océano Uno, 1992).

Unicidad

Solo y sin otro de su especie (Diccionario Océano Uno, 1992).